Koordinátageometria

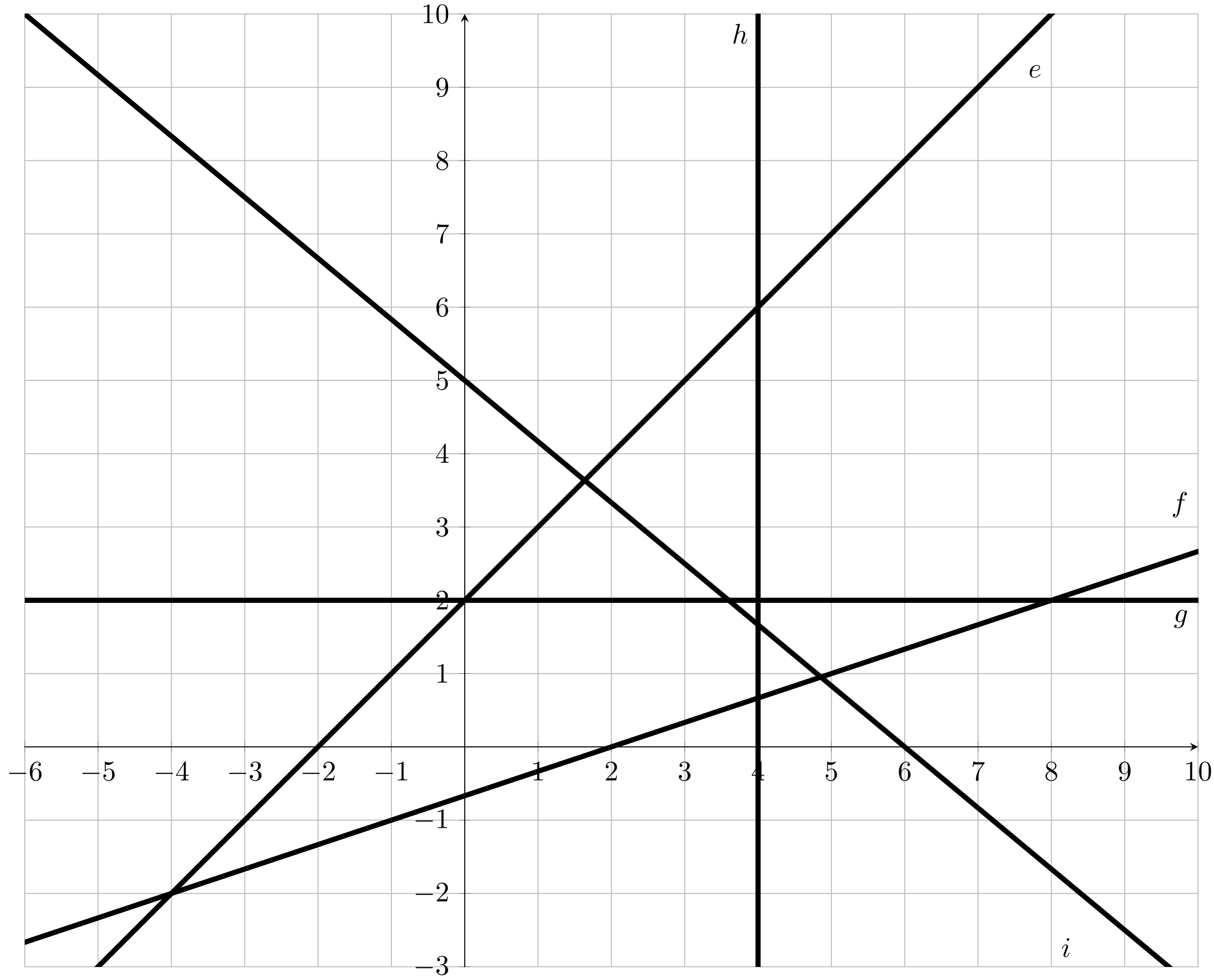
Lenger Dániel

Állapot: 2023. július 10.

Tartalomjegyzék

1. Egyenesek

1.1. Bevezető feladatok, egyenesek egyenletei



1. ábra.

1. Add meg az 1. ábrán látható e, f, g, h, i egyenesek egyenletét.

Megjegyzés: Mit is értünk azalatt, hogy az egyenes (vagy általában egy alakzat) egyenlete? Ahhoz vagyunk szokva, hogy az egyenesek egyenletét $y = mx + c$ alakban adjuk meg, mert mint függvény, így szoktuk meg. Mint látni fogjuk, ennek lesznek hátrányai.
Ezután úgy gondolunk egy-egy alakzat egyenletére, mint valami kifejezésre, amiben x és y változóként megjelenik, és azok az $(x; y)$ pontok tartoznak az alakzathoz, akik azt az egyenletet kielégítik. Az $y = mx + c$ ilyen kifejezés természetesen, de pl az ennek átrendezésével kapott $0 = mx + c - y$ is ilyen. Sőt ha 2-vel felszorozzuk, a $0 = 2mx + 2c - 2y$ is ilyen. És ekkor rögtön rájöhetünk arra, hogy egy egyenesnek (vagy általában egy alakzatnak) nincsen "az egyenlete", hiszen az egyenletét egy tetszőleges nemnulla valós számmal felszorozva szintén egy egyenletét kapjuk, vagyis végtelen sok egyenlete van. Néha majd választunk "kedvenc" egyenleteket, de máskor kifejezetten hasznos lesz, ha megkötések nélkül használhatjuk bármelyik egyenletét.

Megoldás: e) Az egyenes meredksége 1, az y-tengelyt pedig 2 magasan metszi (azaz a $(0; 2)$ pontban), ezért az egyenlete

$$y = 1 \cdot x + 2.$$

f) Meredeksége $\frac{1}{3}$, hiszen amíg 3-at "lép" jobbra, addig 1-et fel. Az x-tengelyt a 2-ben (azaz a $(2;0)$ pontban) metszi, így az egyenlete
$$y = \frac{1}{3}(x-2).$$

g) Ez egy konstans függvény (másképpen fogalmazva a meredeksége 0), mégpedig az
$$y = 2.$$

h) Na, ez már nem függvény (hiszen 4-hez nem csak egy valamit "rendel"), ezt nem tudjuk $y = mx + c$ alakban felírni. Ám ahogy az előző részben a vízszintes egyenest $y = valami$ alakban fel tudtuk írni, ezt pedig $x = valami$ alakban fogjuk tudni. Hiszen az egyenlet azt takarja, hogy azon $(x;y)$ pontok teljesítik, akik rajta vannak az egyenesen, és a függőleges egyenesen pont azok vannak, akiknek az x koordinátája egy adott érték, az y viszont bármi lehet. Vagyis ez az
$$x = 3.$$

i) Használhatnánk a meredekséges módszert itt is, de nem a legkellemesebb számoláshoz jutnánk. Ehelyett próbáljuk meg $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$ alakban keresni az egyenes egyenletét. Miért is jó ez nekünk?
Ha mondjuk $y = 0$ lenne, akkor $\frac{x}{A} = 1 \Leftrightarrow x = A$, azaz az egyenesünk átmegy az $(A;0)$ ponton, másképpen fogalmazva az x-tengelyt A-ban metszi.
Hasonlóan $x = 0$ esetén $y = B$, vagyis ez az egyenes átmegy a $(0;B)$ ponton, vagyis itt metszi az y-tengelyt
Ó, de szerencsénk van, mert az i egyenesről nagyon könnyű leolvasni, hogy hol metszi a tengelyeket: $(6;0)$-ban, illetve $(0;5)$-ben. Ez alapján az így kapott egyenlete
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1.$$

Megjegyzés: Ez utóbbi alakot az egyenes egyenletének *tengelymetszetes alakjának* szokták nevezni. A módszer nem mindig működik, ugyanis kell az, hogy legyen metszéspontja mindkét tengellyel, és ez ne az origó legyen. Vagyis a függőleges, vízszintes, illetve origón átmenő egyenesek esetében ez nem működik, de egyébként igen.

2. Nem olyan jó a felbontása az 1. ábrának... Vajon az f és i egyenesek rácspontban metszik egymást? Határozd meg a metszéspontjukat!

Megoldás: Hogyan határozzuk meg két egyenes metszéspontját? $y = \frac{1}{3}(x-2)$ és $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$ a két egyenlet, amely fennáll a két egyenes pontjaira külön-külön. Vagyis ha találunk egy olyan $(x;y)$ pontot, ami teljesíti mindkettőt, akkor az lesz a metszéspont. Ehhez pedig csak meg kell oldani ezt az egyenletrendszert. Így felírva y már ki is van fejezve az első egyenletből, írjuk be a másodikba:
$$\begin{aligned}\frac{x}{6} + \frac{\frac{1}{3}(x-2)}{5} &= 1\\ \frac{x}{6} + \frac{x-2}{15} &= 1\\ 5x + 2(x-2) &= 30\\ 7x - 4 &= 30\\ 7x &= 34\\ x &= \frac{34}{7}\end{aligned}$$

Ezt beírva az első egyenletbe:
$$y = \frac{1}{3}(x-2) = \frac{1}{3}\left(\frac{34}{7} - 2\right) = \frac{34-14}{21} = \frac{20}{21}.$$

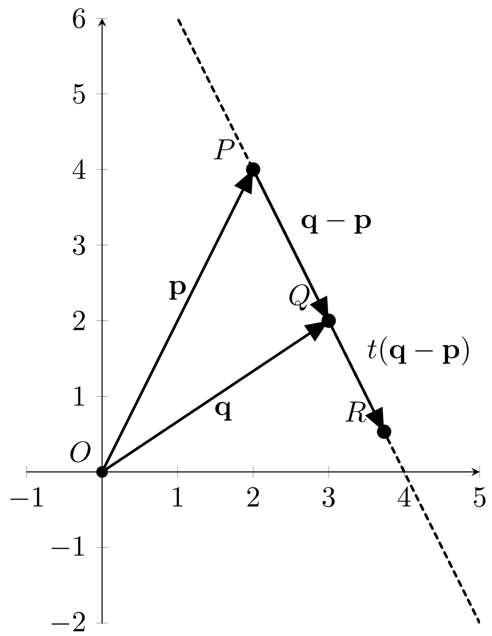
Vagyis az f és i egyenesek a $\left(\frac{34}{7}; \frac{20}{21}\right)$ pontban metszik egymást, ami nem rácspont (bár látszólag nincs messze tőle).

1.2. Kitérő: tényleg egyenesek ezek?

Definíció: Nevezzük *lineáris egyenletnek* az $Ax + By + C = 0$ összefüggést, ahol A, B, C valós számok. Ez látszólag úgy néz ki, mint egy egyenes egyenlete, de valójában mi köze van hozzá? Három dolgot mindenképpen meg kell gondolnunk:

3. a) Ha látunk egy egyenest, ahhoz tudunk megadni lineáris egyenletét?
b) Ha van egy lineáris egyenletünk, az valóban egy egyenes egyenlete?
c) Van-e olyan nem-lineáris egyenlet, ami egy egyenest ír le?

Megoldás: a) Ez az eddigi tanulmányainkból könnyen következik. Ha az egyenes függvény (azaz nem függőleges), akkor két pontja segítségével felírható $y = mx + c$ alakban, ami átrendezve $mx - 1 \cdot y + c = 0$ épp a kívánt alak. Ha pedig függőleges, akkor az egyenlete $x = d$ alakú, amit szintén át tudunk rendezni $1 \cdot x + 0 \cdot y - d = 0$ alakba.
b) Itt kicsit mélyedjünk el abban, hogy mit várunk az egyenesünktől. Ha két különböző pontjába mutató helyvektor $\mathbf{p}$, illetve $\mathbf{q}$, akkor a $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ irányba akárilyen messzire elindulva $\mathbf{p}$-ből az egyenes pontjait kapjuk, mi több, így megkapjuk az egyenes összes pontját. Azaz az egyenes pontjai épp a $\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ pontok, ahol $t \in \mathbb{R}$.



2. ábra.

Szóval akkor mit is szeretnénk? Ha a $\mathbf{p} = (x_p; y_p)$ és $\mathbf{q} = (x_q; y_q)$ pontok koordinátáira is teljesül az $Ax + By + C = 0$ összefüggés, akkor a $\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (x_p + t(x_q - x_p); y_p + t(x_q - x_p))$ koordinátáira is teljesüljön. Írjuk be, és rendezzük:

$$\begin{aligned} A(x_p + t(x_q - x_p)) + B(y_p + t(x_q - x_p)) + C &= \\ A((1-t)x_p + tx_q) + B((1-t)y_p + ty_q) + C &= \\ (1-t)(Ax_p + By_p) + t(Ax_q + By_q) + C &= \\ (1-t)(Ax_p + By_p) + t(Ax_q + By_q) + C((1-t) + t) &= \\ (1-t)(Ax_p + By_p + C) + t(Ax_q + By_q + C) &= \\ (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis valóban, az egyenes összes pontjára fennáll ez a lineáris egyenlet.

Tehát akkor $Ax+By+C=0$ mindig egy egyenest határoz meg? Nem teljesen... Most csak azt láttuk be, hogy ha két különböző pont benne van a $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid Ax+By+C=0\}$ halmazban, akkor az egyenesük összes pontja benne van.
Az egyenesek persze ilyen tulajdonságúak. De nem nehéz meggondolni, hogy ilyen tulajdonságú még a teljes sík is, az üres halmaz is, és egy pont is.
Utóbbi kettőt értjük, miért maradt ki: nem tudunk két külölnböző pontját venni. Előbbit is könnyű megérteni: ha találtunk egy egyenest, és rajta kívül még egy pontot, akkor a pontunkat és az egyenes egy-egy megfelelő pontját véve, és eljátszva az előző gondolatmenetet, a sík minden pontjáról be tudjuk látni, hogy a halmazhoz kell tartozzon.
És persze tudunk is megfelelő lineáris egyenletet mondani a síkhoz: $0x+0y+0=0$ egyenletet tényleg minden $(x;y)$ pont kielégíti.
Az üres halmazhoz is tudunk mondani: $0x+0y+1=0$ egyenlet semmilyen pontra nem teljesülhet.
Érdekes kérdés, hogy tudunk-e olyan lineáris egyenletet mondani, ami csak egy pontra teljesül. Az a helyzet, hogy nem tudunk. Még pedig azért nem, mert az előbbi két "elfajuló" példában olyan $Ax+By+C=0$ egyenletet adtunk meg, melyre $A=B=0$. Könnyű meggondolni, hogy ha A és B valamelyike nem 0, akkor van legalább két pont, melyre teljesül ez a lineáris egyenlet:
Ha $A=0$, de $B\neq 0$, akkor $y=-\frac{C}{B}$, de x bármi lehet (ez egy vízszintes egyenes).
Ha $A\neq 0$, de $B=0$, akkor $x=-\frac{C}{A}$, de y bármi lehet (ez egy függőleges egyenes).
Ha $A\neq 0$, és $B\neq 0$, akkor könnyű kiszámolni, hogy például a $\left(0;-\frac{C}{B}\right)$ és $\left(-\frac{C}{A};0\right)$ pontokra teljesül az egyenlet (ezek lesznek a tengelymetszetek).

Megjegyzés: Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban minidig úgy fogunk gondolni egy ilyen egyenesre, hogy A és B közül legalább az egyik nem 0, még ha ezt nem is kötjük ki minden egyes alkalommal.
c) Vegyünk a kedvenc egyenesünk egyenletét ilyen alakban: $Ax+By+C=0$, és emeljük n-edik hatványra:

$$(Ax+By+C)^n=0.$$

Mivel csak a 0-nak lesz az n-edik hatványa 0, így ha ez a fenti teljesül, akkor automatikusan $Ax+By+C=0$ is fennáll, ami épp a kedvenc egyenesünk pontjaira teljesük, vagyis egy egyenest ír le az egyenlet. Ugyanakkor ha kibontanánk a zárójleket, találnánk benne magasabb fokú tagokat, tehát nem lineáris az egyenlet.
Konkrét egyszerű példák: $x^2=0$, $y^2=0$, $(x+y)^2=0$. (De az $x^2=y^2$ nem lesz jó, érdemes meggondolni, miért.)

1.3. Bevezető feladatok, irányvektor, normálvektor

4. Ismét az 1. ábra jelöléseit használjuk. Add meg annak az egyenesnek az egyenletét, ami
a) párhuzamos e-vel és átmegy a $(2;2)$ ponton.
b) párhuzamos i-vel és átmegy a $(-1;-2)$ ponton.
c) párhuzamos g-vel és átmegy a $(420;69)$ ponton.
d) párhuzamos h-val és átmegy a $(420;69)$ ponton.
e) merőleges e-re, és átmegy a $(0;5)$ ponton.
f) merőleges f-re, és átmegy a $(2;0)$ ponton.
g) merőleges i-re, és átmegy az origón.

Megoldás: a) Ha párhuzamosak, akkor a meredekségük ugyanaz. Ez alapján $y=x+c$ alakú lesz ez az egyenlet. Az alapján, hogy átmegy a $(2;2)$ ponton, azt tudjuk, hogy $2=2+c$, amiből $c=0$, vagyis ez az

$$y=x$$

egyenes.
b) $\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=1$ meredekségét akkor nem számoltuk ki, tegyük meg most. y-ra átrendezve: $y=5\left(1-\frac{x}{6}\right)=-\frac{5}{6}x+5$. Vagyis a keresett egyenesünk $y=-\frac{5}{6}x+c$ alakú. Az alapján, hogy átmegy a $(-1;-2)$ ponton,

tudjuk, hogy $-2 = -\frac{5}{6}(-1) + c$ fennáll, ebből pedig $c = -2 - \frac{5}{6} = -\frac{17}{6}$, vagyis az egyenesünk egyenlete:

$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{17}{6}.$$

c) g vízszintes egyenes, tehát $y = c$ az egyenlete, a pont alapján pedig $c = 69$, vagyis

$$y = 69.$$

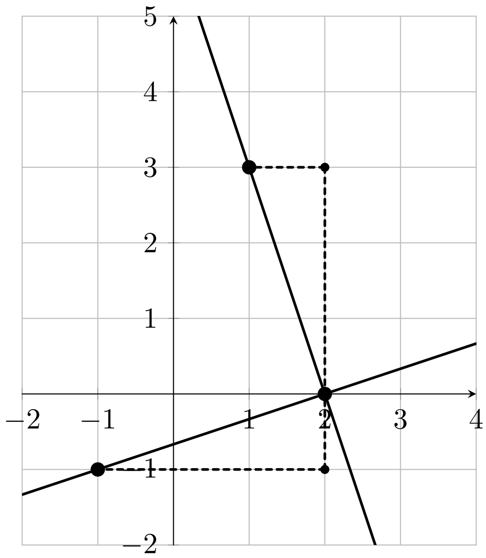
d) h függőleges egyenes, tehát $x = c$ az egyenlete, a pont alapján pedig $c = 420$, vagyis

$$x = 420.$$

e) Az e egyenes $45°$-os (hiszen a két tengely $y = x$ szögfelezőjével párhuzamos), vagyis a rá merőleges $135°$-os lesz, ami épp az $y = -x$ szögfelezővel lesz párhuzamos. Vagyis egyenlete $y = -x + c$ alakú. $(0;5)$-ön átmegy, ez azalapján $0 = -5 + c$, vagyis $c = 5$, vagyis az egyenlete

$$y = -x + 5.$$

f) A $(2;0)$-n átmegy, így az egyenlete valami $m(x-2) = y - 0$ alakú egyenlet lesz. Csak a meredekségét kéne meghatározni.



3. ábra.

Az f egyenes meredeksége $\frac{1}{3}$, ami azt jelenti, hogy amíg a függvény 3-at "lép jobbra", addig 1-et "lép fel". Ha elforgatjuk az ezt jelképező háromszöget (lásd 3. ábra), azt látjuk, hogy az f-re merőleges egyenesnek úgy kell viselkednie, hogy amíg 1-et "lép jobbra", addig 3-at "lép le". Ez alapján egy f-re merőleges egyenes meredeksége -3 kell legyen.
Vagyis az egyenesünk egyenlete

$$y = -3(x-2).$$

g) Amit az előbb végiggondoltunk, az megy általában is. Egy m meredekségű egyenes azt jelenti, hogy, amíg 1-et lépünk jobbra, addig m-et fel (m itt lehet negatív is, az lefelé lépést jelent). Ha elforgatjuk ezt a háromszöget, akkor láthatjuk, hogy a rá merőleges egyenes m-et lép balra, míg 1-et fel. Ez alapján a meredeksége $-\frac{1}{m}$ lesz.
Az i egyenes meredeksége $-\frac{5}{6}$, ahogy korábban már megállapítottuk. Tehát a rá merőleges egyenesek meredeksége $\frac{6}{5}$, és mivel az origón átmenő egyenesről van szó, ezért ez az

$$y = \frac{6}{5}x.$$

Definíció: Egy egyenessel párhuzamos (nem 0 hosszú) vektort az egyenes egy *irányvektorának* nevezzük. Ebből persze következik, hogy ha egy $\mathbf{v}$ irányvektora, és $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $\lambda\mathbf{v}$ is irányvektora. Másképpen fogalmazva, az egyenes két tetszőleges különböző pontját összekötő vektor az egyenes irányvektorát adja.

Definíció: Egy egyenesre merőleges (nem 0 hosszú) vektort az egyenes *normálvektorának* nevezzük. Erre is igaz, hogy ha egy $\mathbf{v}$ normálvektora, és $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $\lambda\mathbf{v}$ is normálvektora.

5. Add meg az 1. ábrán látható e, f, g, h, i egyenesek egy-egy irányvektorát, illetve normálvektorát.

Megoldás: Szimpatikus rácspontok alapján könnyű az irányvektort megkapni. Ha pedig annak megcseréljük a két koordinátáját, és az egyiknek megváltoztatjuk az előjelét, egy normálvektort kapunk. Ez utóbbit ugyanúgy könnyű meggondolni, mint ahogy a 3. ábrán is csináltuk.
Ez alapján:

név	egyenlet	irányvektor	normálvektor	egy másik egyenlete
e	$y = 1 \cdot x + 2$	$(1;1)$	$(1;-1)$	$1x - 1y + 2 = 0$
f	$y = \frac{1}{3}(x-2)$	$(3;1)$	$(1;-3)$	$1x - 3y - 2 = 0$
g	$y = 2$	$(1;0)$	$(0;1)$	$0x + 1y - 2 = 0$
h	$x = 3$	$(0;1)$	$(1;0)$	$1x + 0y - 3 = 0$
i	$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$	$(6;-5)$	$(5;6)$	$5x + 6y - 30 = 0$

1. táblázat.

Na, mi ez az utolsó oszlop az 1. táblázatban, és honnan jött? Nagyon emlékeztet minket az előttelévő oszlopra...

6. Az $Ax + By + C = 0$ egyenletű egyenes egy normálvektora $(A; B)$, egy irányvektora $(-B; A)$.

Megoldás: Vegyünk két különböző pontot az egyenesről: (x_1, y_1) és (x_2, y_2). Mivel az egyenesen vannak, tudjuk, hogy teljesül rájuk, hogy $Ax_1 + By_1 + C = 0$, illetve $Ax_2 + By_2 + C = 0$. Ha ezt a két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0.$$

Ez pedig épp azt mutatja, hogy az $(A; B)$, és az $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ vektorok merőleges (hiszen skaláris szorzatuk 0). Mivel utóbbi az egyenes egy irányvektora, így előbbi kénytelen egy normálvektorának lenni.
Ha pedig ismerjük az egyenes egy normálvektorát, a koordináták megcserélésével, és egyik előjelének megváltoztatásával megkapjuk az irányvetorát, ami így $(-B; A)$ lesz.

1.4. Pár gyakorló feladat

7. Legyen $A = (-3; 5)$, $B = (0; -4)$, $C = (5; 1)$. Add meg az egyenletét
a) AB oldalfelező merőlegesének.
b) a C-ből induló magasságnak.
c) a C-ből induló súlyvonalnak.
d) a C-ből induló szögefelezőnek.

Megoldás: TODO

8. Egy egyenlőszárú háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A = (0; 0)$, $B = (82; 0)$ és $C = (41; 71)$. Géza szerint ez a háromszög szabályos.
a) Határozza meg a háromszög szögeit fokban, három tizedesjegyre kerekítve!
b) Határozza meg a háromszög AC és AB oldalainak arányát négy tizedesjegyre kerekítve!

Forrás: 2022. tavaszi emelt érettségi 6. feladata

Megoldás: TODO

1.5. Pont és egyenes távolsága

9. Az 1. ábrán milyen messze van az origó az e, f, g, h, i egyenesektől?

Megoldás: e) Az e-re ha merőlegest bocsájtunk, annak egyenlete $y=-x$ lesz. Ennek és az $y=x+2$-nek a metszéspontját könnyű kiszámolni – vagy az ábráról leolvasni –, hogy a $(-1;1)$ pont lesz. Ennek a távolsága pedig az origótól $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

f) Az f-re merőleges egyenes egy normálvektora egyben az f irányvektora is. Ezt meg már meghatároztuk (lásd 1. táblázat): $(3;1)$. Emiatt az f-re merőleges egyenes egyenlete $3x+1y+c=0$ alakú, de mivel az origón megy át, így $c=0$.

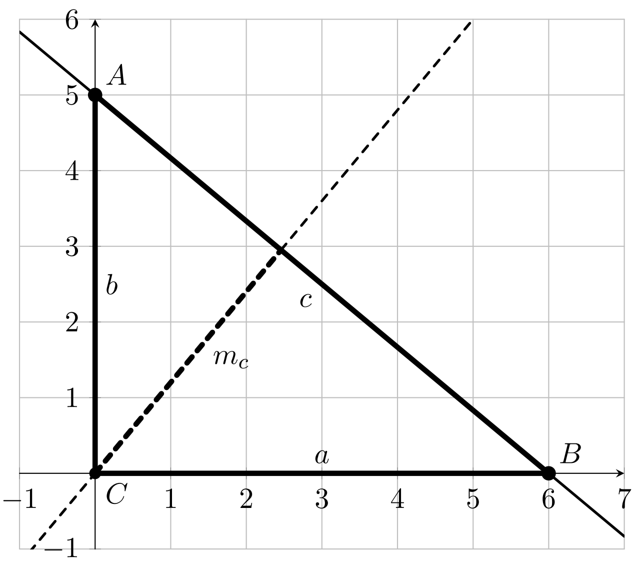
$y=\frac{1}{3}(x-2)$ és $3x+y=0$ metszéspontjának meghatározásához a második egyenletbe helyettesítsük be az elsőből kapott kifejezést y-ra:

$$\begin{aligned}3x+\frac{1}{3}(x-2)&=0\\ \frac{10}{3}x-\frac{2}{3}&=0\\ \frac{10}{3}x&=\frac{2}{3}\\ x&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Amiből $y=-\frac{3}{5}$. $(0;0)$ és $\left(\frac{1}{5};-\frac{3}{5}\right)$ távolsága: $\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

g) , **h)** Triviálisan 2, illetve 4.

i) Vegyük észre, hogy a koordináta-tengelyekkel együtt megjelenik itt egy derékszögű háromszög, melynek épp a derékszögű csúcsához tartozó magasságát keressük.



4. ábra.

Tudjuk, hogy a háromszög területe $T=\frac{cm_c}{2}=\frac{ab}{2}$, amiből $a=6$, $b=5$, $c=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{71}$. Ebből $m_c=\frac{ab}{c}=\frac{30}{\sqrt{71}}$.

10. Milyen messze van az $Ax+By+C=0$ egyenes az origótól?

Megoldás: Ez az előző ötlet működni fog általában. Az $Ax+By+C=0$ a tengelyeket a $(-\frac{C}{A};0)$, illetve $(0;-\frac{C}{B})$ pontokban metszi. Ez alapján a két befogó hossza $\left|\frac{C}{A}\right|$, illetve $\left|\frac{C}{B}\right|$, míg az átfogóé $\sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2+\left(\frac{C}{B}\right)^2}=\sqrt{\frac{C^2(B^2+A^2)}{A^2B^2}}=\left|\frac{C\sqrt{A^2+B^2}}{AB}\right|$.

Így a keresett magasság:

$$\frac{\left|\frac{C}{A}\right|\left|\frac{C}{B}\right|}{\left|\frac{C\sqrt{A^2+B^2}}{AB}\right|} = \left|\frac{C^2AB}{ABC\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ez a módszer nem működik, ha $A = 0$ vagy $B = 0$ (szerencsére A^2+B^2 nem lehet 0). Ám ilyen esetben könnyű kiszámolni, hogy $\left|\frac{C}{B}\right|$, illetve $\left|\frac{C}{A}\right|$ a válasz, ami valójában speciális esete a fenti képletnek.

Megjegyzés: Ahogy már beszéltünk róla, általában mindegy hogy egy egyenes melyik egyenletét használjuk. Egy nem-nulla valós számmal bármikor fel tudjuk szorozni az egyenletet. Mi lenne, ha speciálisan választanánk egy olyat, amire ez a fenti képlet egész szép. Ha $A^2 + B^2 = 1$ lenne, akkor a pont és egyenes távolsága épp $|C|$ lenne. De megtehetjük, hogy így állítjuk be az együtthatókat? Szerencsére igen. Legyen $A' = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $B' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $C' = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Ekkor

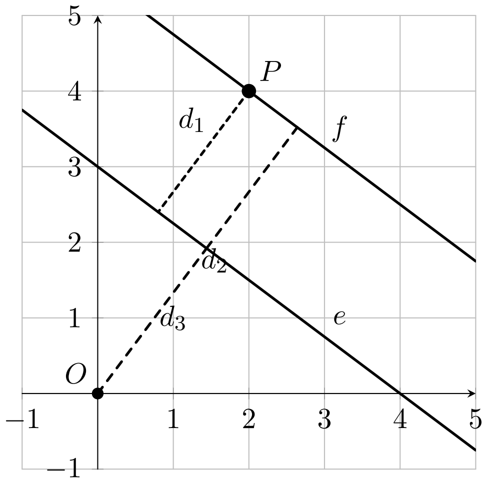
$$A'^2 + B'^2 = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1.$$

És mivel A és B nem lehet egyszerre 0, így garantáltalan $\sqrt{A^2+B^2} \neq 0$, szóval szabadott vele osztanunk.

Az egyenesek ilyen egyenletét normált vagy lenormált egyenletnek hívjuk.

11. Az e egyenes egyenlete $Ax + By + C = 0$, ahol $A^2 + B^2 = 1$. Milyen messze van ettől az egyenestől a $P = (x_0; y_0)$ pont?

Megoldás: Vegyük fel azt az f egyenest, mely párhuzamos egyenes e-vel, és átmegy az P ponton.



5. ábra.

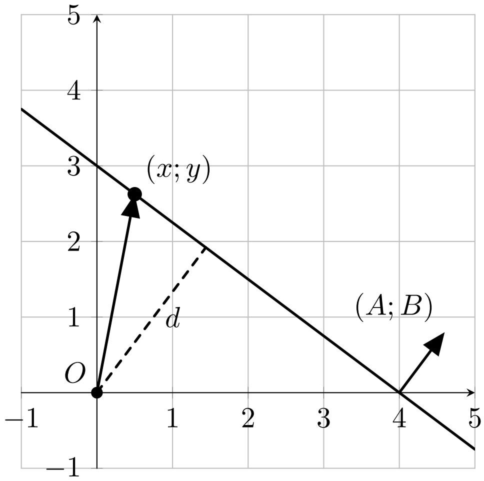
Legyen az e és P távolsága d_1. Az f egyenes az origótól legyen d_2 távolságra, míg az e egyenes d_1-re. Ekkor nyilván $d_1 = d_2 - d_3$. Mi ugye d_1-et keressük, d_2-t könnyen meg tudjuk határozni, a kérdés, hogy vajon d_3-at is?

Szerencsére igen. Az f egyenes párhuzamos az e-vel, tehát az egyenelete $Ax + By + C' = 0$ alakú. És átmegy a P-n, tehát $Ax_0 + By_0 + C' = 0$, ami alapján $f : Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$. Vagyis $d_2 = C$, $d_3 = -(Ax_0 + By_0)$, így

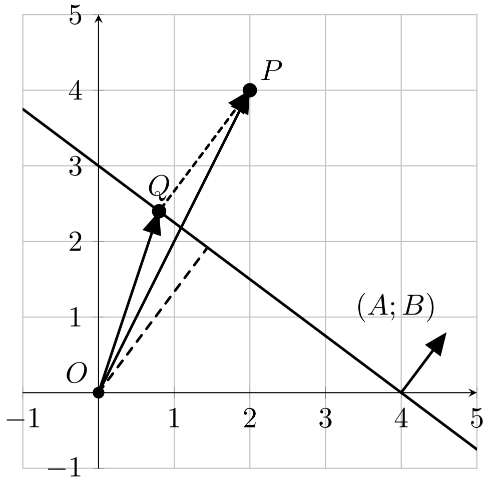
$$d_1 = Ax_0 + By_0 + C.$$

Megjegyzés: Na, megálljunk csak! Mi történt az abszolútértékekkel? Teljesen megfeledkeztünk róluk! Valójában az Ax_0+By_0+C kifejezés előjele is jelent valamit. Ez ugyanis az egyenes egyik oldalán végig pozitív, a másik oldalán végig negatív. De mégis mi dönti el, hogy az egyenesnek melyik a pozitív, és melyik a negatív oldala? Valójában ez nem az egyenesnek a jellemzője, hanem az egyenletének. Ugyanis

a $-Ax - By - C = 0$ ugyanezt az egyenest írja le, csak épp fordítva van, hogy melyik a pozitív, és melyik a negatív oldala. Ez pedig azért lehet, mert egy egyenesnek pontosan két olyan normálvektora van, amiknek a hossza egy: $(A;B)$ és $(-A;-B)$.
A normálvektor segítségével egyébként adhatunk egy új bizonyítást is erre a két feladatra:
Legyen $A^2 + B^2 = 1$. Az $(x;y)$ pont pontosan akkor van rajta ezen az egyenesen, ha $Ax + By + C = 0$. Értsük meg, mit jelent az $(A;B)\cdot(x;y)$ skaláris szorzat. (Lásd 6. ábra.)
A nekünk kedvező értelmezés most az lesz, hogy ez az $(A;B)$ hossza szorozva az $(x;y)$-nak az $(A;B)$ irányba eső vetületével. Ez utóbbi ugyanis épp az egyenes távolságát jelenti az origótól, azaz d-t. Előbbi pedig 1. Vagyis $(A;B)\cdot(x;y) = d$. Ugyanakkor $(A;B)\cdot(x;y) = Ax + By = -C$. Azaz ismételten megkaptuk, hogy milyen messze van az egyenesünk az origótól, ám most már az előjelét is értjük. Ha a választott normálvektorunk irányába indul el az egyenes, akkor pozitív lesz $-C$ értéke, míg ha a másik irányba, akkor negatív lesz $-C$ értéke.



6. ábra.



7. ábra.

Az általános pont-egyenes távolsághoz pedig nézzük a 7. ábrat. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$. Nézzük meg, itt mit jelent, ha valamit megskalárszozunk az egyenes normálvektorával. $(A;B)\cdot\overrightarrow{QP}$ épp a pont és egyenes távolsága, erre hajtunk. $(A;B)\cdot\overrightarrow{OQ}$ az egyenes és az origó távolsága, vagyis $-C$ a korábbiak alapján. $(A;B)\cdot\overrightarrow{OP} = (A;B)\cdot(x_0;y_0) = Ax_0 + By_0$
Ez alapján tehát a pont és egyenes távolsága:

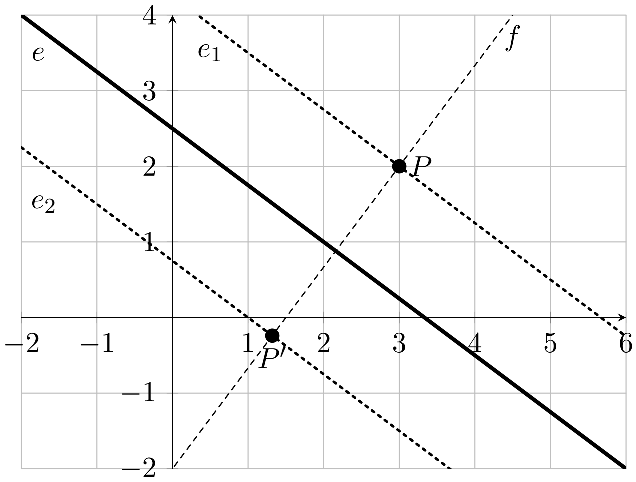
$$(A;B)\cdot\overrightarrow{QP} = (A;B)\cdot\overrightarrow{OP} - (A;B)\cdot\overrightarrow{OQ} = (Ax_0 + By_0) - (-C) = Ax_0 + By_0 + C.$$

12. Tükrözzük a $P = (3;2)$ pontot az $e : 3x+4y = 10$ egyenesre. Mik az így kapott P' pont koordinátái?

Megoldás: Legyen a P-ből e-re állított merőleges f. Ennek normálvektora $(-4;3)$, vagyis $-4x+3y+C = 0$ alakú egyenlete lesz. És mivel átmegy a $(3;2)$ ponton, így $-4(x-3)+3(y-2) = 0$ lesz az egyenlete, rendezve

$$f : -4x + 3y + 6 = 0.$$

Legyen e_1 a P-n áthaladó e-vel párhuzamos egyenes, míg e_2 ennek a tükörképe e-re. Ha e_2-t meghatároznánk, az $e_2 \cap f$ metszéspontot már könnyű kiszámolni.
Szóval e_2. Ehhez először is, mit tudunk e_1-ről? Ezen egyenesen azok a pontok vannak, amik e-től ugyanolyan távol vannak, mint P. Hoppá! De ennek minden részletét meg tudjuk adni egyenlettel. Az e egyenletét gyorsan osszuk le $\sqrt{3^2+4^2} = 5$-tel: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$. Ettől $P = (3;2)$ épp $\frac{3}{5}\cdot 3 + \frac{4}{5}\cdot 2 - 2 = \frac{7}{5}$ távol van.
Vagyis e_2 pontjai is ilyen messze vannak e-től, csak a másik irányba. De hát ez azt jelenti, hogy $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = -\frac{7}{5}$ épp ezt az e_2 egyenest írja le.



8. ábra.

Ez alapján (rendezés és 5-tel való felszorzás után)

$$e_2 : 3x + 4y - 3 = 0.$$

e_2 és f metszéspontja pedig már könnyen számolható az eddigi módszerekkel:

$$\left(\frac{33}{25}; -\frac{6}{25}\right)$$

Megjegyzés: Valójában nem volt szükség az 5-tel való leosztásra, anélkül is működik az $Ax+By+C = -(Ax_0 + By_0 + C)$ ötlete.

13. Két egyenes egyenlete $A_1x+B_1y+C_1 = 0$, illetve $A_2x+B_2y+C_2 = 0$, ahol $A_1^2+B_1^2 = A_2^2+B_2^2 = 1$. Add meg a szögfelezőjük egyenletét.

Megoldás: Egy $(x; y)$ pont akkor van rajta a szögfelezőn, ha egyenlő távol van a két egyenestől. Szerencsére pont és egyenes távolságát meg tudjuk mondani: $A_1x + B_1y + C_1$, illetve $A_2x + B_2y + C_2$. Csak az kell, hogy ez a két érték megegyezzen. Vagyis a szögfelező egyenlete:

$$A_1x + B_1y + C_1 = A_2x + B_2y + C_2.$$

De várjunk csak. Két egyenesnek két szögfelezője is van. Hol vesztettük el a másikat? Hát ott, hogy az egyenletünk előjeles távolságot ad. Vagyis azok is ergyenlő távol vannak, akikre a két képlet egymás ellentetjét adja. Vagyis

$$A_1x + B_1y + C_1 = -(A_2x + B_2y + C_2)$$

is szögfelező.

1.6. Egyenesek egyenletének összege

14. Bizonyítsd be, hogy egy háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át.

Megoldás: Legyen a három csúcs $A = (a_1; a_2)$, $B = (b_1; b_2)$, $C = (c_1; c_2)$.
Mit tud az A-ból indított m_a magasságvonal? Merőleges BC-re, és átmegy A-n. Előbbi azt jelenti, hogy a két egyenes normálvektora is merőleges, vagyis m_a nomrálvektora egyben BC irányvektora is. BC-nek meg könnyen tudunk mondani egy irányvektorát: $\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1; c_2 - b_2)$. Tehát

$$m_a : (c_1 - b_1)(x - a_1) + (c_2 - b_2)(y - a_2) = 0$$

lesz, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy átmegy az $A = (a_1; a_2)$ ponton.

Szimmetria okokból ugyanígy kaphatjuk, hogy

$$m_b : (a_1 - c_1)(x - b_1) + (a_2 - c_2)(y - b_2) = 0,$$

$$m_c : (b_1 - a_1)(x - c_1) + (b_2 - a_2)(y - c_2) = 0.$$

Vegyük észre, hogy ha összeadjuk a három egyenletet, a bal oldalon minden kiesik:

$$m_a + m_b + m_c : 0x + 0y + 0 = 0.$$

De mit is jelent ez? Átrendezve $m_c = -(m_a + m_b)$, ami azt mutatja hogy m_c egy egyenletét megkaphatjuk úgy, hogy összeadjuk a másik két magasságvonal egy-egy egyenletét, és aztán megszorozzuk -1-gyel. (Persze nem-nulla konstanssal való felszorzás ugyanazt az egyenest írja le.)
Legyen m_a és m_b metszéspontja M. M koordinátái azt tudják, hogy ha m_a-ba, illetve m_b-be ha behelyettesíjük őket, 0-t kapunk. Ám emiatt, ha $-(m_a + m_b)$-be helyettesítjük be, szintén 0-t kell kapnunk. Vagyis M rajta van $-(m_a + m_b)$ egyenes is, de hát ez éppen m_c. Ez pedig épp azt jelenti, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

15. Adott egy ABC háromszög és egy e egyenes a háromszög síkjában. A háromszög csúcsainak merőleges vetületei az e egyenesen A', B' és C'. Az A' ponton át húzott és BC-re merőleges egyenes m_A, a B'-n át haladó és AC-re merőleges egyenes m_B, végül a C'-n át húzott AB-re merőleges egyenes m_C. Bizonyítsuk be, hogy az m_A, m_B és m_C egyenesek egy ponton mennek át!

Forrás: Arany Dániel, Haladók, III. kategória, 2009. döntő 3. feladat

Megoldás: TODO

16. Három egyenes egyenlete

$$\begin{aligned} e_1 &: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ e_2 &: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \\ e_3 &: A_3x + B_3y + C_3 = 0. \end{aligned}$$

Mutasd meg, hogy az alábbi két állítás ekvivalens.

(*i*) Léteznek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hogy ha ilyen súlyokkal összeadjuk az egyenletket, minden kiesik, azaz

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 : 0x + 0y + 0 = 0$$

lesz. (Másképpen fogalmazva:

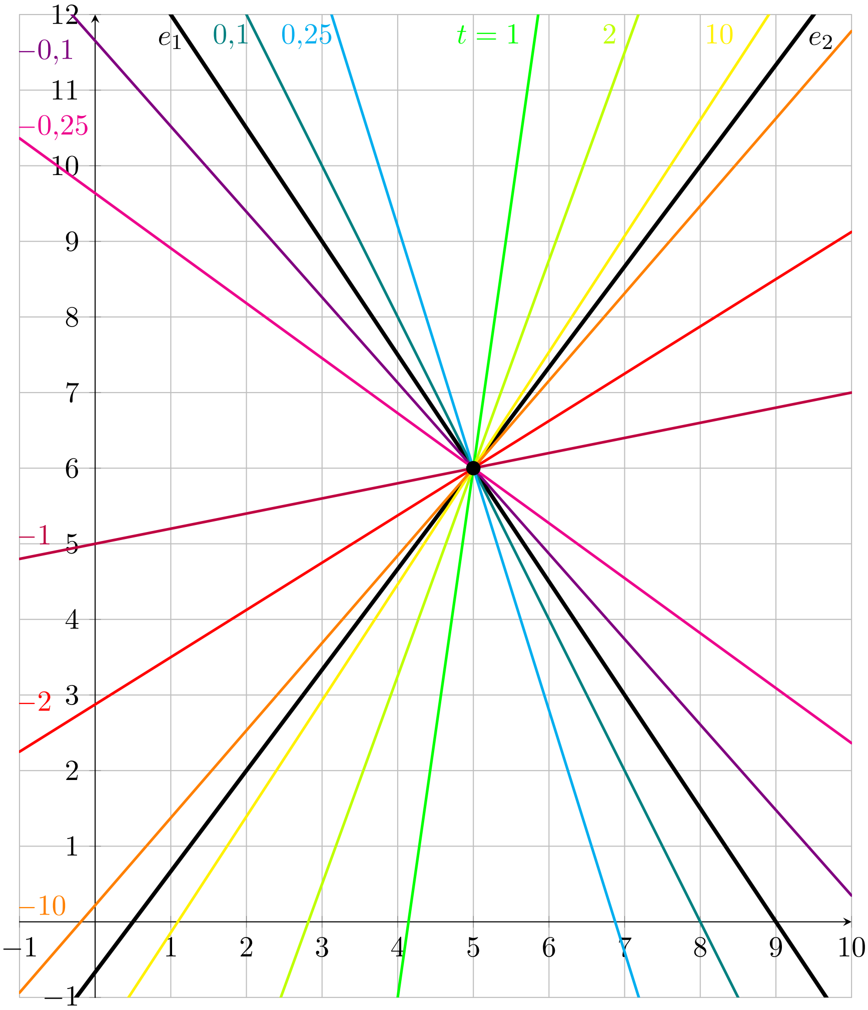
$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0 \\ \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 = 0 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0 \end{aligned}$$

egyszerre teljesül.)

(*ii*) e_1, e_2 és e_3 egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

Megoldás: $(i) \Rightarrow (ii)$.
Ez igazából ugyanaz az irány, amit az előző két feladatban is meggondoltunk már.
1. eset: e_1 és e_2 nem párhuzamos. Legyen a metszéspontjuk M. Ekkor $e_3 = -\frac{\alpha}{\gamma}e_1 - \frac{\beta}{\gamma}e_2$ egyenletébe behelyettesítve M koordinátáit ismét 0-t kell kapnunk, vagyis M rajta van e_3-on is.
2. eset: e_1 és e_2 párhuzamosak. Lehet-e, hogy e_3 nem párhuzamos velük, hanem valahol metszi őket? Tegyük fel, hogy M-ben metszi e_1-et. Ekkor az előző esetet alkalmazva $e_1 = -\frac{\alpha}{\beta}e_1 - \frac{\gamma}{\beta}e_3$ miatt M e_2-n is rajta van, vagyis az jött ki, hogy e_1 és e_2 mégis metszi egymást, ami ellentmond a feltevésünknek.

$(ii) \Rightarrow (i)$.
1. eset: egy ponton mennek át. Legyen $e_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $e_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, és $f(t) = e_1 + te_2$, ami alatt azt értjük, hogy $f(t) : (A_1x + B_1y + C_1) + t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ az egyenes egyenlete.
$f(t)$ minden t-re egyenes lesz, sőt az előző irány alapján azt is tudjuk, hogy át fog menni e_1 és e_2 metszéspontján (M). Konkrét t-ket kipróbálva azt látjuk, hogy $t = 0$-ra e_1-et kapjuk (ez nem meglepő), és ahogy t abszolútértéke egyre nő, $f(t)$ egyenes "átfordul" e_2-be, de mintha azt sose érné el. (Lásd 9. ábra.)
Ha sikerülne belátni, hogy minden egyenest fel tudunk így írni, ami átmegy M-en, akkor kész lennénk, hiszen akkor e_3-ra is lesz egy alkalmas t, hogy $e_3 = e_1 + te_2$, amiből kapjuk, hogy $\alpha = 1$, $\beta = t$, $\gamma = -1$ alkalmas súlyok. ($t = 0$ okozhatna problémát, hiszen a 0 súlyokat nem engedtük meg, de ez esetben e_1 és e_3 egybeesne, amit szintén kizártunk, szóval nem lesz ezzel baj.)



9. ábra. $e_1 : 3x + 2y - 27 = 0$, $e_2 : 4x - 3y - 2 = 0$

Vegyünk fel egy $(x_0; y_0)$ pontot. Keressünk olyan t értéket, amire $f(t)$ átmegy ezen a ponton. Ha minden pontra találunk ilyet, az persze azt jelenti, hogy az összes M-en átmenő egyenes felírható $f(t)$ alakban.
Az kell tehát nekünk, hogy $(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + t(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$, ami egyszerű átrendezéssel

$$t = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}.$$

Ez csak abban az esetben nem lesz értelmezhető, ha a nevező 0. Ám az pont azt jelenti, hogy (x_0, y_0) rajta van e_2-n. Vagyis azt látjuk, hogy az összes M-en átmenő egyenest fel tudjuk $f(t)$-ként írni, kivéve

e_2-t. De abból indultunk ki, hogy a három egyenes különböző, így ez nem is okoz problémát.
2. eset: párhuzamosak. Ugyanez az ötlet működik. $f(t) = e_1 + te_2$ mindig párhuzamos lesz az eredeti két egyenesünkkel (ugyanolyan irányú a normálvektora), kivéve $t = -1$ esetén, amikor nem értelmes az egyenlet. Könnyű meggondolni, hogy minden ponton (ami nem e_2-n van) át fog menni egy $f(t)$. Emiatt valamilyen t-re $e_3 = e_1 + te_2$, és emiatt ugyanúgy fel tudjuk írni a súlyokat, mint az előző esetben.

Megjegyzés: Az e_1+te_2 alakkal elvesztettük a szimmetriát a két egyenes közt. De igazából ez könnyen visszanyerhető. Ha $\alpha e_1+\beta e_2$ alakban keresünk egyszerre két súlyt. Mivel egy valós számmal felszorozva persze ugyanannak az egyenesnek kapjuk egy egyenletét, ezért valójában minket csak az $\alpha : \beta$ arány érdekel. $\alpha : \beta = 1 : t$ alakban persze megkapunk majdnem minden egyenest, kivéve az $\alpha : \beta = 0 : 1$ arányút, ami e_2-nek felelnek. (Mint ahogy e_1 az$\alpha : \beta = 1 : 0$-nak.

Definíció: Az egy ponton átmenő összes egyenes halmazát, illetve az egy egy egyenessel párhuzamos összes egyenes halmazát *egyenessor*nak vagy *sugársor*nak nevezzük. (Angolul *pencil of lines.*) Mint láttuk, egy ilyen sorban bármelyik két tag egyenletéből lineáris kombinációként (azaz súlyokkal összeadva) megkapható a többi egyenlete.

2. Körök

2.1. Bevezető feladatok

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű alakzaton a Pitagorasz-tétel azon $(x; y)$ pontok vannak rajta, amelyek távolsága az origótól éppen 1.

17. **a)** Mi lesz az $x^2 + y^2 = 10$ egyenletű kör sugara?
b) Add meg a $(3; 2)$ középpontú, 5 sugarú kör egyenletét.
c) Mi az $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ egyenletű kör középpontja, illetve sugara?
d) Mi az $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 44 = 0$ egyenletű kör középpontja, illetve sugara?
e) Mi az $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$ egyenletű kör középpontja, illetve sugara?
f) Mi az $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 42 = 0$ egyenletű kör középpontja, illetve sugara?
Egyáltalán körök-e ezek?

Megoldás: **a)** Az $x^2 + y^2 = \sqrt{10}^2$ alakból jobban látszik a Pitagorasz-tétel, vagyis hogy $\sqrt{10}$ lesz a sugara, nem 10.
b) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$
c) $(1; -1)$ a középpont, 2 a sugár.
d) Alakítsuk teljes négyzetté: $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 44 = (x - 3)^2 - 9 + (y + 6)^2 - 36 + 44 = (x - 3)^2 + (y + 6)^2 - 1$.
Vagyis ez az $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 1$ egyenletű kör, aminek a középpontja $(3; -6)$, sugara 1.
e) Alakítsuk megint teljes négyzetté: $x^2+y^2+2x+4y+5 = (x+1)^2-1+(y+2)^2-4+5 = (x+1)^2+(y+2)^2$.
Vagyis ez az $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$ egyenletű... kör? Mit is jelent ez? Azon pontokról beszélünk, amik $(-1; -2)$-től 0 távolságra vannak. De ezt csak egy pont tuddja, maga a $(-1; -2)$. Technikailag végülis ez egy köregyenlet, ezért ezt szokás *pontkör*nek is nevezni.
f) Járt utat járatlanért...: $x^2+y^2+6x-4y+42 = (x+3)^2-9+(y-2)^2-4+42 = (x+3)^2+(y-2)^2+29$.
Vagyis ez az $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -29$ egyenletű... hát egy biztos, nem kör. Valójában egy olyan $(x; y)$ pont sincs, amire ez az egyenlet teljesülhet, hiszen a bal oldal nemnegatív, míg a jobb oldal negatív. Tehát ez az egyenlet az üres halmazt írja le.

Megjegyzés: Éretsségin a fentit kell tudni, sőt a fentit kell mondani. Ám az ilyen köröket szokás *képzetes kör*öknek is nevezni, ha ismerjük a komplex számokat. Hiszen komplex számok közt tudunk találni olyat, amiknek a négyzete negatív. Pl $x = 5i - 3$, $y = 2i + 2$ számokról nem nehéz ellenőrizni, hogy teljesítik az egyenletet.

18. **a)** Mik lesznek az $x^2 + y^2 = 25$ kör és az $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ egyenes metszéspontjai?
b) Mi lesz az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz a $(7; -1)$ pontból húzott két érintő egyenlete?

Megoldás: a) Ha egy $(x; y)$ pont rajta van a körön is, és az egyenesen is, az azt jelenti, hogy mindkét egyenlet teljesül rá. Vagyis egy egyenletrendszer megoldását keressük. Az egyenes képletéből y-t behelyettesítve a kör egyenletébe:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 &= 25 \\ x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} &= 25 \\ \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{75}{4} &= 0 \\ x^2 - 2x - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldva ezt a másodfokút, kapjuk, hogy $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Visszahelyettesítve az egyenes egyenletébe, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Vagyis a két metszéspont $(5; 0)$ és $(-3; 4)$.

b) Erre a feladatra háromféle lényegesen különböző megközelítést is mutatunk.

1. módszer. A $(7; -1)$ ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete $m(x - 7) = y + 1$. Ez a függőleges kivételével leírja az összes egyenest, de az könnyen látszik, hogy az $x = 7$ egyenes nem metszi a kört. Vagyis elég az ilyen alakúakkal foglalkoznunk. Ha az **a)** részhez hasonlóan felírnánk ennek az egyenesnek és a körnek a metszéspontját, valószínűleg ugyanúgy egy másodfokú egyenlethez lyukadunk ki. Ha ennek a másodfokúnak a diszkriminánsa 0, akkor a két megoldása egybeesik, és pont ezt jelenti az érintő. Tervnek jó, nézzük működik-e?

Az egyenes egyenletéből $y = m(x - 7) - 1$, amit beírva a kör egyenletébe:

$$x^2 + (mx - (7m + 1))^2 = 25$$

$$x^2 + (mx)^2 - 2m(7m + 1) + (7m + 1)^2 - 25 = 0$$

Nézzük a diszkirminánst:

$$D = (2m(7m + 1))^2 - 4(1 + m^2)((7m + 1)^2 - 25) =$$

$$= -4(7m + 1)^2 + 100 - 100m^2 = -96m^2 - 56m + 96$$

Megoldva ezt a másodfokút $m_1 = -\frac{4}{3}$, $m_2 = \frac{3}{4}$ lesz a két egyenes meredeksége, amit kerestünk.

2. módszer. Vegyük észre, hogy $P = (7; -1)$ is rajta van az $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ egyenesen. (Lásd 10. ábra.) Mivel az egyenes két metszéspontját (A és B) már meghatároztuk a körrel, így a P pont körre vonatkozó hatványát könnyen ki tudjuk számolni: $PA \cdot PB = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-0)^2} \cdot \sqrt{(7+3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{5}\sqrt{125} = 25$. Ez pedig azt jelenti, hogy a P-ből a körhöz húzott két érintő hossza $\sqrt{25} = 5$ lesz. Vagyis ha felvesszük a P középpontú 5 sugarú kört, és megnézzük, hol metszi el az eredeti körünket, a két metszéspont (C és D) épp a két érintési pontot adja.

Tehát akkor az

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$

$$(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25 \qquad (2)$$

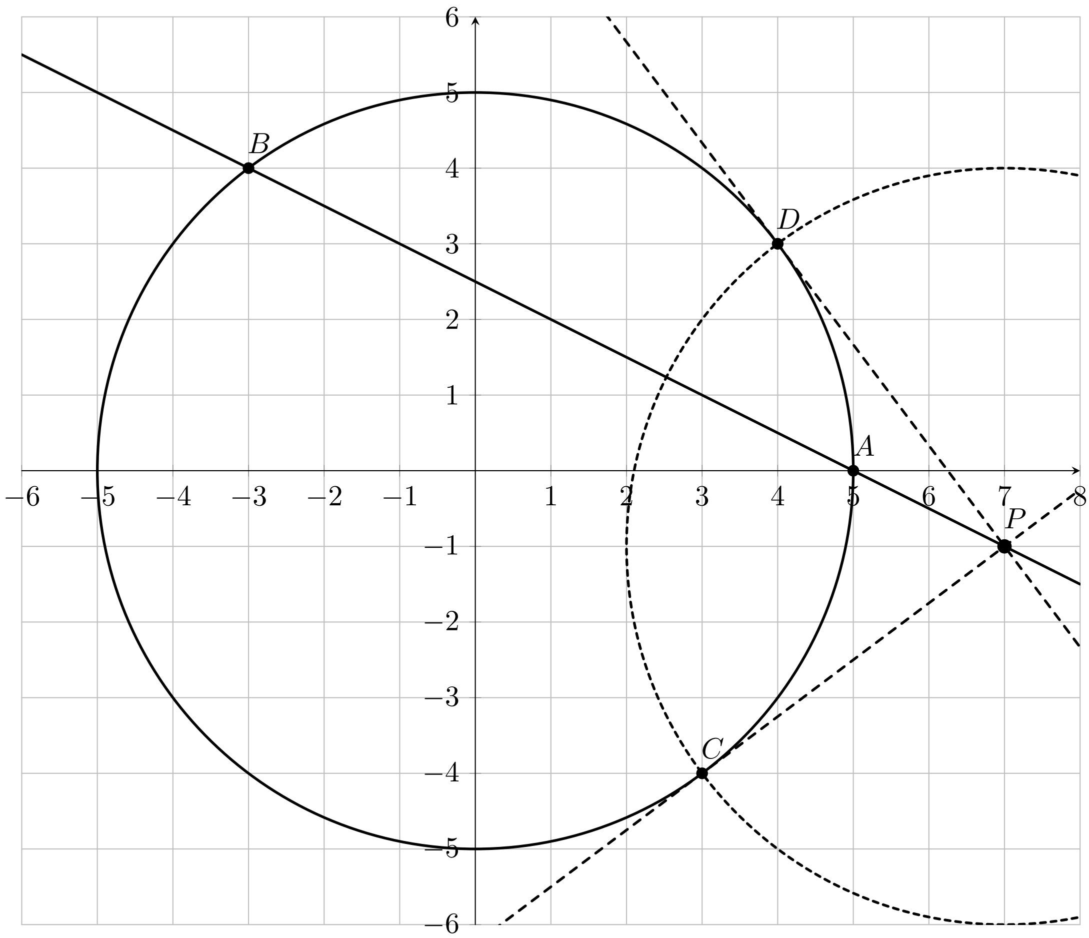
egyenletrendszert szeretnénk megoldani. Ehhez vonjuk ki (2)-ből (1)-et, majd rendezzük:

$$-14x + 49 + 2y + 1 = 0$$

$$y = -7x + 25 \qquad (3)$$

Mostmár y-t be tudjuk helyettesíteni mondjuk (1)-be:

$$\begin{aligned} x^2 + (-7x + 25)^2 &= 25 \\ x^2 + 49x^2 - 350x + 625 - 25 &= 0 \\ 50x^2 - 350x + 600 &= 0 \\ x^2 - 7x + 12 &= 0 \end{aligned}$$



10. ábra.

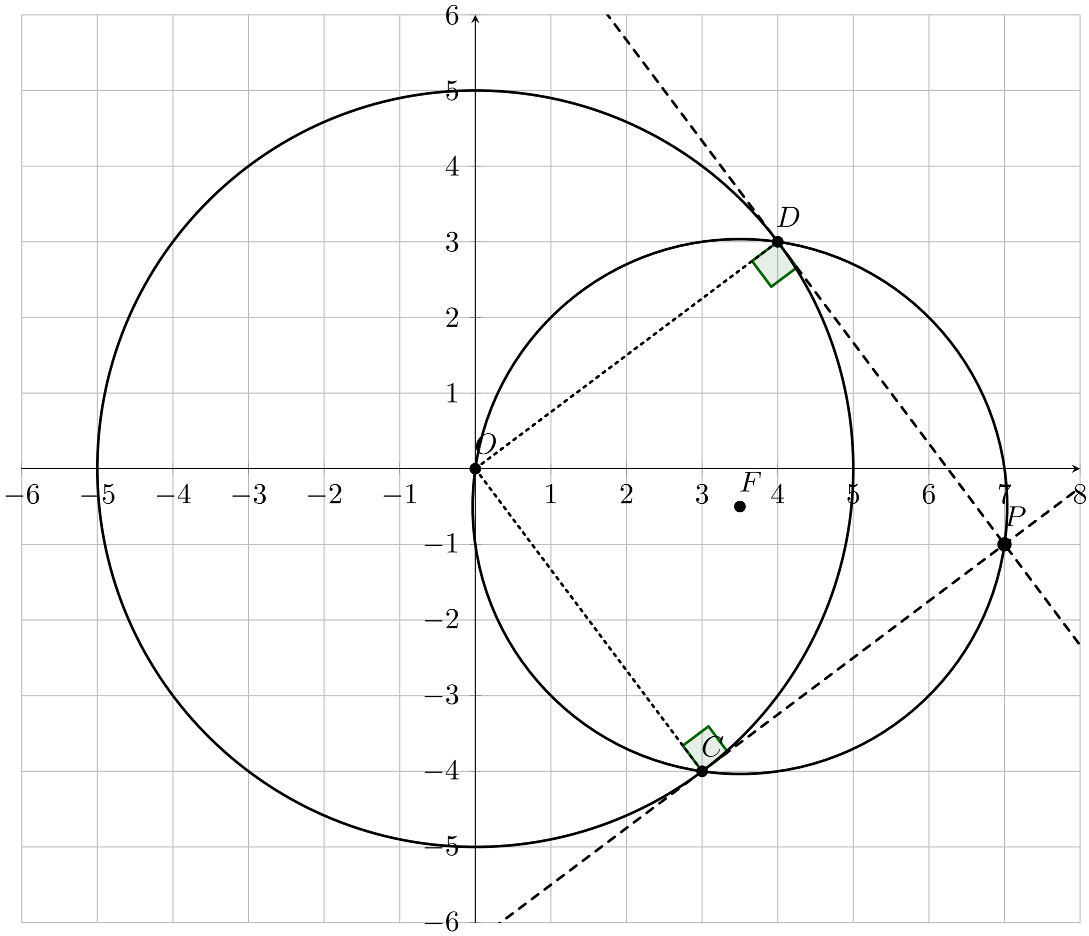
Ebből $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, amit visszahelyettesítve (3)-be, kapjuk, hogy $y_1 = -4$, $y_2 = 3$.
Vagyis a két kör metszéspontja $C = (3; -4)$, $D = (4; 3)$. Ebből pedig már könnyű kiszámolni a PC és PD egyenesek egyenletét, ami persze ugyanaz lesz, mint az 1. módszer esetén.

Megjegyzés: Egy pillanatra maradjunk még a (3) egyenletnél. Látszólag ez csak egy technikai lépés volt, ami abban segített minket, hogy meg tudjuk oldani az egyenletrendszert. De ha jobban megnézzük, ez egy egyenes egyenlete. Vajon melyik ez az egyenes?
Ez nem lehet más, mint a CD egyenes. Hiszen C, illetve D is olyan, hogy (1)-be és (2)-be behelyettesítve is 0-t kapunk (hiszen rajta vannak mindkét körön). Vagyis a különbségükbe behelyettesítve is 0-t kell kapjunk. Ami azt jelenti, hogy az egyenes átmegy mindkét ponton, vagyis ez csak a CD egyenes lehet. Ez egyben a két kör közös hatványvonala is, de erre még visszatérünk.
3. módszer. Az érintési pontban az érintő és a sugár derékszöget zárnak be. Ez azt jelenti, hogy a két érintési pont (C és D) rajta van OP Thalész-körén. (Lásd 11. ábra.)
OP Thalész-körét nem nehéz meghatározni. Középpontja OP felezőpontja, vagyis $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Sugara pedig az OP távolság fele, vagyis $\frac{\sqrt{(7-0)^2+(-1-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$. Ez alapján a Thalész-kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4} \tag{4}$$

Most tehát (1) és (4) egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldani. Ha (4)-ből kivonjuk (1)-et, majd rendezzük:

$$\begin{aligned} -7x + \frac{49}{4} + y + \frac{1}{4} &= \frac{50}{4} - 25 \\ y &= 7x - 25 \end{aligned}$$



11. ábra.

Jé, megint megkaptuk a (3) egyenletet, mint az előbb. Vagyis innen ugyanaz lesz a számolás vége is. De ha jobban meggondoljuk, nem véletlen, hogy ugyanazt az egyenletet kaptuk! Hiszen a kapott egyenes mindkét esetben a C és D pontokon megy át.

Megjegyzés: Az 1. és a 3. módszer működik általában is. De a 2.-nál kellett egy kis szerencse, hogy már tudjuk egy P-n átmenő egyenes két metszéspontját a körrel. Valójában a pont körre vonatkozó hatványát elég könnyen meg tudjuk határozni koordináta-geometriával.

2.2. Pont körre vonatkozó hatványa

19. Mi az $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ körre vonatkozó hatványa az $(x_0;y_0)$ pontnak?

Megoldás: Tudjuk, hogy ha d a pont és a kör középpontjának távolsága, és r a kör sugara, akkor a pont körre vonatkozó hatványa d^2-r^2. d-t pedig könnyű megkapni, hiszen az $(x_0;y_0)$ és az $(a;b)$ pontok távolsága: $d=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$. Ez alapján a pont körre vonatkozó hatványa

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2.$$

Megjegyzés: Valami nagyon hasonló történt, mint a pont és egyenes távolságánál. Vettük a ponthalmaz egy speciális 0-ra rendezett egyenletét (egyenesnél olyat, ahol $A^2+B^2=1$ volt, itt pedig azt, ahol x^2 és y^2 együtthatója 1), és abba szimplán beírtuk a pont koordinátáit.

20. Bizonyítsd be, hogy két kör közös hatványvonala egy egyenes. Add is meg az egyenes egyenletét.

Legyen a két kör egyenlete $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1^2=0$, illetve $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2^2=0$. Ahhoz, hogy egy $(x;y)$ pont hatványa a két körre megegyezzen, az kell, hogy

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2^2.$$

Mindkét oldalon egy-egy x^2, illetve y^2 van, így azok kiesnek, szóval egy egyenes egyenlete lesz, ami marad. Ha mindent egy oldalra rendezünk:

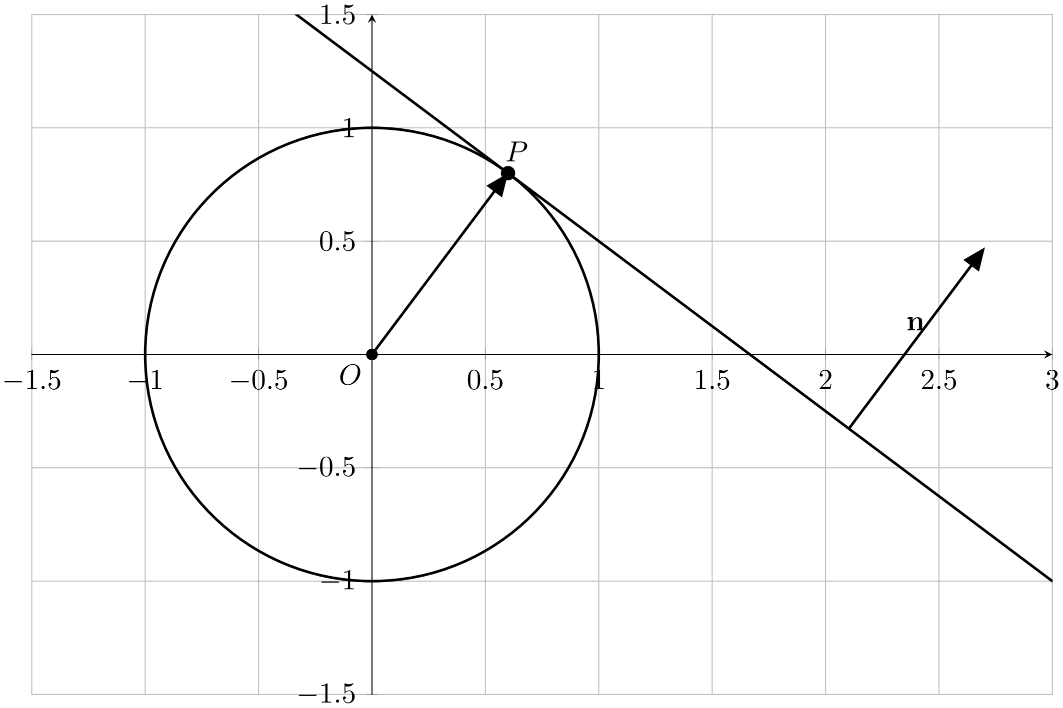
$$(-2x_1+2x_2)x+(-2y_1+2y_2)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0.$$

2.3. Kör pontbeli érintője, felébehelyettesítés

21. Add meg az $x^2+y^2-1=0$ kör $P=(x_0;y_0)$-beli érintőjét (a pont rajta van a körön).

Megoldás: Az érintésbeli pontban a sugár és az érintő merőlegesek egymásra (lásd 12. ábra). Ez azt jelenti, hogy a sugár (mint $\overrightarrow{OP}$ vektor) egyben az érintő normálvektora is. Márpedig $\overrightarrow{OP}=(x_0;y_0)$, vagyis az egyenes egyenlete $x_0x+y_0y+C=0$ alakú lesz. Mivel az egyenes átmegy P-n, így $x_0x_0+y_0y_0+C=0$, de P rajta van a körön, így $x_0x_0+y_0y_0=1$, vagyis $C=-1$. Tehát az érintő egyenlete:

$$x_0x+y_0y-1=0$$



12. ábra.

22. Add meg az $x^2+y^2-25=0$ kör $(3;4)$-beli érintőjét (a pont rajta van a körön).

Megoldás: Hasonlóan járunk el, mint az előbb.
Az érintésbeli pontban a sugár és az érintő merőlegesek egymásra. Ez azt jelenti, hogy a sugár (mint $\overrightarrow{OP}$ vektor) egyben az érintő normálvektora is. Márpedig $\overrightarrow{OP}=(3;4)$, vagyis az egyenes egyenlete $3x+4y+C=0$ alakú lesz. Mivel az egyenes átmegy P-n, így $3\cdot+4\cdot4+C=0$, amiből $C=-25$. Tehát az érintő egyenlete:

$$3x+4y-25=0$$

23. Add meg az $(x-u)^2+(y-v)^2-r^2=0$ kör $(x_0;y_0)$-beli érintőjét (a pont rajta van a körön).

Megoldás: Hasonlóan járunk el, mint az előző két esetben.
Az érintésbeli pontban a sugár és az érintő merőlegesek egymásra (lásd 13. ábra). Ez azt jelenti, hogy a sugár (mint $\overrightarrow{OP}$ vektor) egyben az érintő normálvektora is. Márpedig $\overrightarrow{OP} = (x_0 - u; y_0 - v)$, vagyis az egyenes egyenlete $(x_0 - u)x + (y_0 - v)y + C = 0$ alakú lesz. Mivel az egyenes átmegy $P = (x_0; y_0)$-n, így

$$(x_0 - u)(x - x_0) + (y_0 - v)(y - y_0) = 0 \tag{5}$$

lesz. Tudjuk továbbá, hogy

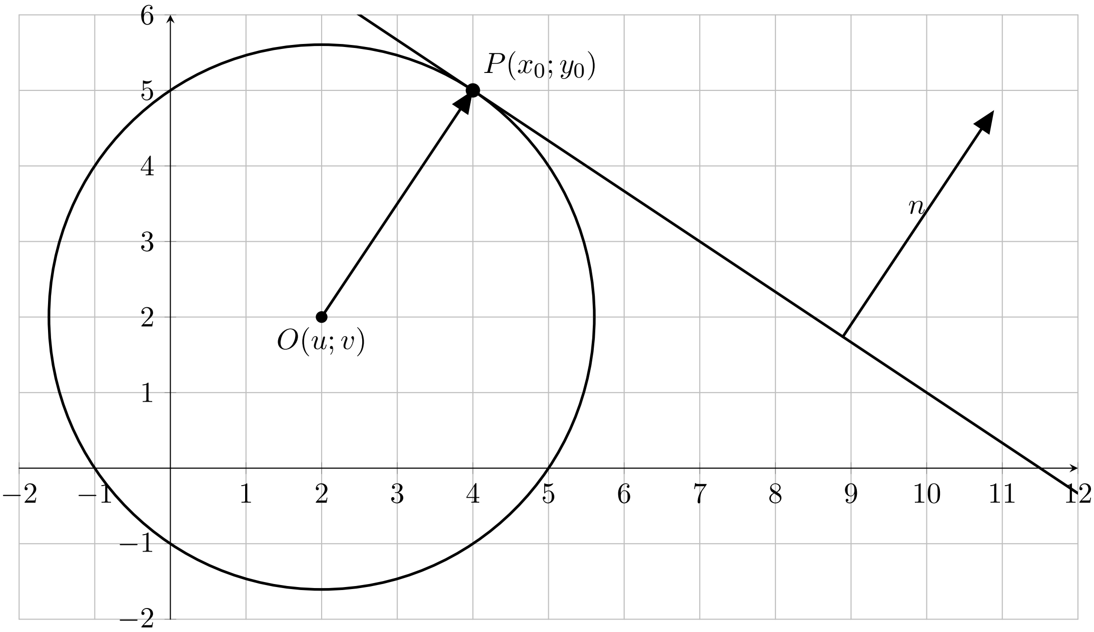
$$(x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2 - r^2 = 0 \tag{6}$$

is teljesül. Ha összeadjuk (5)-öt és (6)-ot:

$$(x_0 - u)((x_0 - u) + (x - x_0)) + (y_0 - v)((y_0 - v) + (x - y_0)) - r^2 = 0.$$

Rendezve:

$$(x_0 - u)(x - u) + (y_0 - v)(y - v) - r^2 = 0. \tag{7}$$



13. ábra.

Megjegyzés: Nézzük meg kicsit jobban a (7) egyenletet. Nagyon hasonlít a kör egyenletére. Egész pontosan olyan, mintha vettük volna kör egyenletét $(x - u)(x - u) + (y - v)(y - v) - r^2 = 0$ alakban, és a két x közül az egyik helyére x_0-t írtunk, és a két y közül is az egyik helyére y_0-t írtunk. Éppen emiatt ezt a módszert *felébehelyettesítés*nek nevezzük, hiszen a lehetséges helyek felébe helyettesítettünk csak be.

24. Mit ad a felébehelyettesítés, ha a kör egy külső pontját helyettesítjük felébe?

Megoldás: Lásd 7. fejezet.

25. Az ABC háromszög beírt köre az AC és BC oldalakat az X és Y pontokban érinti. A B-ből induló belső szögfelező az XY szakaszt P-ben metszi. Mutasd meg, hogy $APB\sphericalangle = 90°$.

Forrás: Arany Dániel, Haladók, III. kategória, 2013. döntő 1. feladat

Megoldás: TODO

2.4. Appoloniusz-kör, körsorok

26. Hol vannak azon pontok a síkon, melyek a $(42;69)$ ponttól 6-szor olyan távol vannak, mint a $(3;-2)$-től?

Megoldás: Az $(x;y)$ pont a $(42;69)$-től $\sqrt{(x-42)^2+(y-69)^2}$ távol van, míg a $(3;-2)$-től $\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}$. Ez alapján az általunk keresett pontokra az teljesül, hogy

$$\sqrt{(x-42)^2+(y-69)^2}=6\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, így a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, tehát az általunk keresett alakzat egyenlete:

$$(x-42)^2+(y-69)^2=36(x-3)^2+36(y+2)^2.$$

Egy oldalra rendezve:

$$\begin{aligned}0=&36(x-3)^2+36(y+2)^2-(x-42)^2-(y-69)^2=\\=&36(x^2-6x+9)+36(y^2+4y+4)-(x^2-2\cdot 42x+42^2)-(y^2-2\cdot 69y+69^2)=\\=&35x^2+(-36\cdot 6+2\cdot 42)x+35y^2+(36\cdot 4+2\cdot 69)+(36\cdot 9+36\cdot 4-42^2-69^2)\\=&35x^2-132x+35y^2+282y-6057.\end{aligned}$$

35-tel leosztás után próbáljuk kör egyenletévé alakítani:

$$\begin{aligned}0=&x^2-\frac{132}{35}x+y^2+\frac{282}{35}y-\frac{6057}{35}\\=&\left(x-\frac{66}{35}\right)^2+\left(y-\frac{141}{35}\right)^2-\left(\left(\frac{66}{35}\right)^2+\left(\frac{141}{35}\right)^2+\frac{6057}{35}\right)\end{aligned}$$

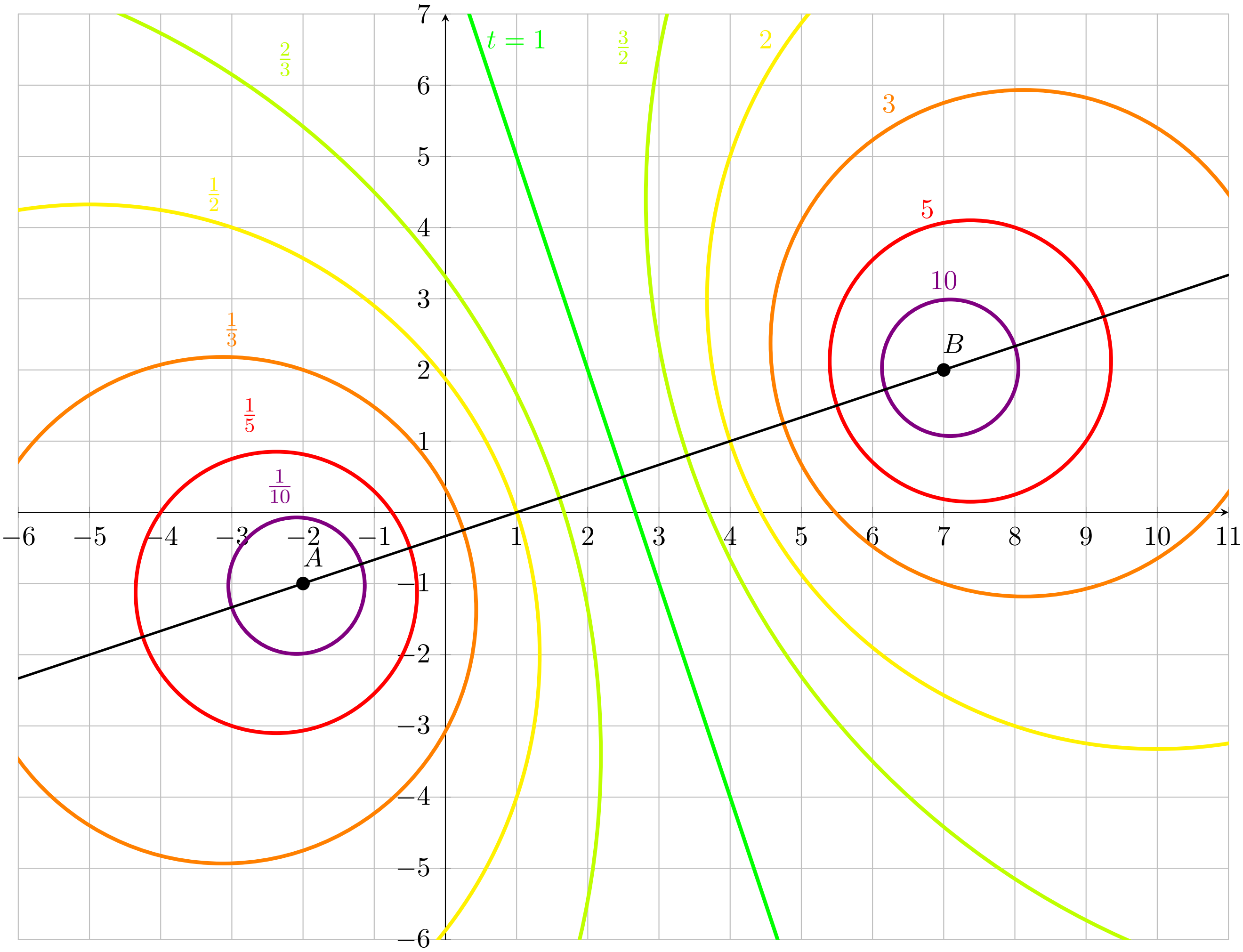
Tehát ez tényleg egy kör lesz, aminek a középpontja $\left(\frac{66}{35};\frac{141}{35}\right)$, sugara pedig $\sqrt{\left(\frac{66}{35}\right)^2+\left(\frac{141}{35}\right)^2+\frac{6057}{35}}\approx$ 13,887

Megjegyzés: Természetesen nem csak 6-szoros távolságaránnyal lehet ezt megkérdezni, hanem t-szeressel is. A számolást ugyanígy elvégezve, egy kör egyenletét fogjuk kapni majdnem mindig. (Lásd 14. ábra.) Ugyanis egy ponton leosztottunk t^2-1-gyel (a feladatban 35-tel). És ez lehet 0 is ha $t^2=1$, azaz $t=1$ vagy $t=-1$. Mivel a távolságok nem-negatívak, így -1 nem lehet az arányuk, de 1 igen. Ekkor a két ponttól vett távolságuk ugyanaz, vagyis ez a szakaszfelező merőlegesük lesz. (Mellékesen kaptunk egy új, egész gyors módszert két pont szakaszfelező merőlegesének kiszámolására.) Minden más t-re viszont tényleg egy kör egyenletét kapjuk. Pontosabban $t=0$ esetén csak egy pontot (pontkört) kaptunk.

A másik pontot viszont semmilyen t értékre nem kapjuk meg, csak "$t=\infty$" esetén kapnánk meg. Láttunk már hasonlót az egyenessoroknál (lásd 16. feladat). Erre – és a látszólagos szimmetria elvesztésére – az ott említett módszer tud megoldást adni. Ha a két kör egyenlete k_1 és k_2, akkor $\alpha k_1-\beta k_2$ alakban nézzünk az új alakzataink egyenletét, ahol α,β nem-negatív valós számok. Ekkor megint csak az $\alpha:\beta$ arány határozza meg az alakzatot, hiszen egy egyenletet egy nem-nulla konstanssal leosztva kapott másik egyenlet ugyanazt az alakzatot határozza meg. Speciálisan $\alpha:\beta=1:1$ a szakaszfelező merőleges, $\alpha:\beta=1:0$ és $\alpha:\beta=0:1$ a két pontkört adja. Érdemes meggondolni, hogy ha α és β különböző előjelű, akkor képzetes köröket kapunk (vagyis egyenletük egy körnek tűnik, de átrendezve negatív lenne a sugár négyzete).

Az egyenessorokhoz hasonlóan, az ilyen alakzatok családját *körsornak* nevezünk (angolul *pencil of circles*). Itt is meg lehet gondolni, hogy a család bármely két tagját kiválasztva, azok egyenleteit külkönböző súlyokkal összeadva, megkapjuk a család összes többi tagjának egyenletét.

Körsorból valójában négyféle van, amit aszerint lehet egyszerűen csoportosítani, hogy a körsor két adott tagjának hány metszéspontja van. Ugyanis ha egy pont rajta van két körön is, akkor rajta kell legyen az összesen. Ez alapján ha a köröknek



14. ábra. $A = (-2; -1)$-től t-szer olyan távol lévő pontok, mint $B = (7; 2)$-től

- 2 metszéspontja van, akkor *elliptikus körsorról* (angolul *elliptic pencil*) beszélünk. Ezek valójában két adott pontot átmenő körök. Egy ilyen körsorban van egy egyenes, nincs se pontkör, se képzetes kör. Az egyenes a körök közös hatványvonala.
- 1 metszéspontja van, akkor *parabolikus körsorról* (angolul *parabolic pencil*) beszélünk. Ebben az esetben a körök érintkeznek az adot egy pontban. Egy ilyen körsorban van egy egyenes, egy pontkör, és nincs benne képzetes körök. Az egyenes a körök közös érintője, a pontkör pedig az érintési pont.
- 0 metszéspontja van, és nincs két koncentrikus kör, akkor *hiperbolikus körsorról* (angolul *hyperbolic pencil*) beszélünk. Egy ilyen körsorban van egy egyenes, két pontkör, és vannak benne képzetes körök.
- 0 metszéspontja van, és van két koncentrikus kör, akkor a körsor összes tagja koncentrikus. Egy ilyen körsorban nincs egyenes, van egy pontkör, és vannak benne képzetes körök.

2.5. Kiss Géza körsoros feladatai

TODO

27. ?

28. ?

29. ?

3. Parabolák

3.1. Bevezető feladatok

Definíció: Egy adott (fókusz)ponttól (angolul *focus*) és egy (vezér)egyenestől (angolul *directix*) egyenlő távol lévő pontok halmazát *parabolának* (angolul *parabola*) nevezzük.

30. Mutasd meg, hogy az $y = x^2$ egyenletű ponthalmaz tényleg egy parabola. Mi a fókuszpontja és a vezéregyenese?

Megoldás: Ha ez tényleg egy parabola, akkor szimmetriaokokból arra számítunk, hogy a fókuszpontja az y-tengelyre esis (vagyis $(0; f)$ alakú), a vezéregyenese pedig az x-tengellyel párhuzamos (vagyis $y = v$ alakú). Ráadásul a $(0; 0)$ rajta van a parabolán, emiatt $v = -f$-nek teljesülnie kell. Nézzük meg, hogy milyen f esetén teljesülhet ez.
Mi is kell nekünk? Hogy minden $(x; y)$ pontra (ahol $y = x^2$)

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-f)^2} = y + f,$$

hiszen a bal oldal a $(0; f)$-től vett távolság, a jobb oldal pedig az $y = -f$-től. Emeljük négyzetre, és rendezzük:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2 + (y-f)^2} &= y + f \\
x^2 + (y-f)^2 &= (y+f)^2 \\
x^2 &= (y+f)^2 - (y-f)^2 = 4yf = 4x^2 f \\
0 &= x^2(4f-1)
\end{aligned}$$

Ahhoz hogy ez minden x esetén teljesüljön, $4f - 1 = 0$, azaz $f = \frac{1}{4}$ kell.
És ha visszanézzük a számolást $f = \frac{1}{4}$-del, azt látjuk, hogy ez valóban teljesül az összes $(x; y)$ pontpárra, ahol $y = x^2$, vagyis a parabola minden pontja tényleg egyforma messze van a $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ és az $y = -\frac{1}{4}$ egyenestől.

Definíció: A parabola p **paramétere** a fókuszpont és a vezéregyenes távolsága. (Ez az $y = x^2$ esetén $\frac{1}{2}$.)

Definíció: A parabola f **fókusztávolsága** (angolul *focal length*) a fókuszpont és a tengelypont távolsága. (Ez az $y = x^2$ esetén $\frac{1}{4}$.)

Definíció: A parabola **(szimmetria)tengelye** a fókuszpontból a vezéregyenesre bocsájtott merőleges. (Ez az $y = x^2$ esetén az y-tengely.)

Definíció: A **tengelypont** (angolul *vertex*) a parabola "csúcsa", azaz a tengely és a parabola metszéspontja. (Ez az $y = x^2$ esetén a $(0; 0)$.)

31. Add meg a p paraméterű, $(0; 0)$ tengelypontú, felfelé nyíló parabola egyenletét.

Megoldás: Nagyjából az előző számolást fogjuk megismételni. Azon $(x; y)$ pontokat keressük, melyek az $F = \left(0; \frac{p}{2}\right)$ ponttól és az $y = -\frac{p}{2}$ egyenestől egyforma távol vannak, azaz

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= y + \frac{p}{2} \\
x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \\
x^2 &= \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = 2py \\
y &= \frac{x^2}{2p}
\end{aligned}$$

32. Add meg a p paraméterű, $(0;0)$ tengelypontú, **a)** lefelé, **b)** jobbra, illetve **c)** balra nyíló parabola egyenletét.

Megoldás: Hogy lefelé nyíljon, csak tükrözni kell a felfelé nyílót az x-tengelyre, vagyis az egyenlete

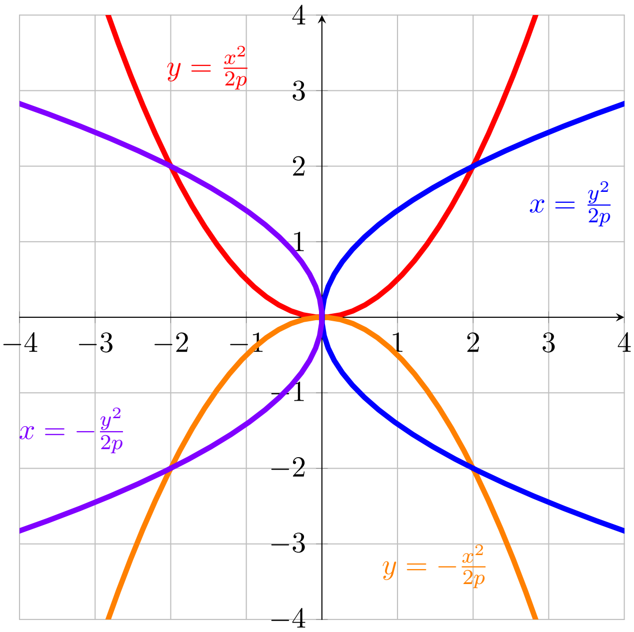
$$y = -\frac{x^2}{2p}.$$

Az x és y szerepének megcserélésével épp a jobbranézőt kapjuk:

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

ezt tükrözve az y-tengelyre pedig a balranézőt:

$$x = -\frac{y^2}{2p}.$$



15. ábra. $p = 1$ esetén a 4 égtáj irányába álló parabola

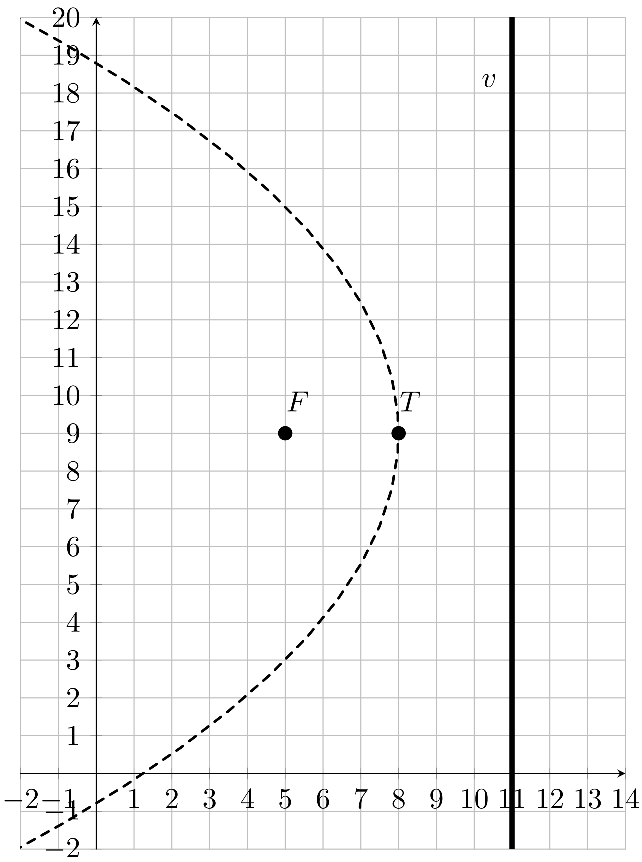
33. Töltsd ki a 2. táblázatot:

fókuszpont	vezéregyenes	tengelypont	egyenlet
$(5;9)$	$x = 11$		
$(3;7)$	$y = 9$		
	$x = -11$	$(-6;3)$	
$(-2;5{,}5)$		$(-2;5)$	
			$y = x^2 + 6x - 1$
			$y = 16x - 2x^2 - 27$
			$y = \frac{x^2}{4} - x + 2$
			$6(x-y) = y^2 + 21$
			$y^2 - 2y + 8x = 15$
			$y - x = (x+y)^2$

2. táblázat.

Megoldás: A fókuszpont-tengelypont-vezéregyenes hármasból bármelyik kettőt ismerve, könnyen megadható a harmadik.
Az $(x_0; y_0)$ tengelypontú felfelé/lefelé néző parabola egyenlete $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ alakú lesz, ahol $|a| = \frac{1}{2p}$, előjele pedig pozitív, ha felfelé néz, negatív, ha lefelé néz.
Az $(x_0; y_0)$ tengelypontú balra/jobbra néző parabola egyenlete $x - x_0 = a(y - y_0)^2$ alakú lesz, ahol $|a| = \frac{1}{2p}$, előjele pedig pozitív, ha jobbra néz, negatív, ha balra néz.
Ugyanezen gondolatmenetet visszafelé csinálva, megkaphatjuk az egyenletből a tengelypontot és a paramétert.
Ezen ötletekkel felvértezve oldjuk meg mondjuk az első és az ötödik sort. A többit hasonlóan lehet megoldani (kivéve az utolsó sort).
Az $(5; 9)$ fókuszpontú, $x = 11$ vezéregyenesű parabola. (Lásd 16. ábra.) A tengelypontja így az $y = 9$ egyenesre esik, x koordinátája pedig $x = \frac{5+11}{2} = 8$. Tehát $(8; 9)$ a tengelypontja. Így egyenlete $x - 8 = a(y - 9)^2$ alakú lesz, ahol $a < 0$, hiszen balra néz. Továbbá $p = 11 - 5 = 6$, vagyis $|a| = \frac{1}{2p} = \frac{1}{12}$. Tehát a parabola egyenlete

$$x - 8 = -\frac{1}{12}(y - 9)^2$$



16. ábra. Az $(5; 9)$ fókuszpontú, $x = 11$ vezéregyenesű parabola.

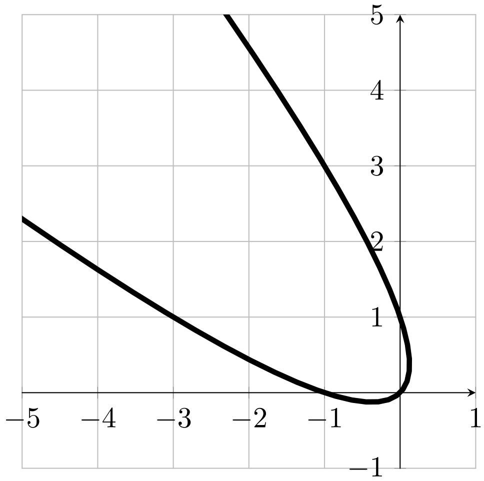
Az $y = x^2 + 6x - 1$ egyenletű parabola. $y = x^2 + 6x - 1 = (x + 3)^2 - 10$, azaz a parabola egyenlete átrendezve:

$$y + 10 = (x + 3)^2.$$

Ez alapján tengelypontja $(-3; -10)$, és paramétere $p = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$. Mivel felfelé néz, így a fókuszpont $\frac{1}{4}$-del "felfelé" van a tengelyponttól, a vezéregyenes pedig $\frac{1}{4}$-del "lefelé". Tehát a fókuszpont $\left(-3; -10 + \frac{1}{4}\right)$, a vezéregyenes pedig $y = -10 - \frac{1}{4}$

Megjegyzés: Az utolsó sorban látható egyenletet kibontva van x^2-es és y^2-es tag is, vagyis nem úgy néz ki, mint az eddig általunk vizsgált parabolák. Egyáltalán parabola ez? Geogebrában ábrázolva (17.

ábra) annak tűnik, de "ferde". Erre még vissza fogunk térni, illetve a 6. fejezetben alaposabban is foglalkozunk vele.



17. ábra. $y - x = (x + y)^2$: "ferde" parabola

34. Mi az egyenlete annak a $(3; 7)$ tengelypontú, x-tengellyel párhuzamos tengelyű parabolának, mely 12 hosszú szakaszt metsz ki az y-tengelyből?

Megoldás: Az y-tengelyt a parabola tengelye a $(0; 7)$ pontban metszi, szimmetriaokokból ettől felfelé, illetve lefelé 6-tal metszi a parabola a tengelyt. Vagyis átmegy a $(0; 1)$, illetve $(0; 13)$ pontokon.
Innen többféleképpen is befejezhetjük.
Az egyik lehetőség, hogy a parabola állása alapján tudjuk, hogy $x = ay^2 + by + c$ alakú egyenlet írja le. Ebbe $(x; y) = (0; 1)$, $(x; y) = (0; 13)$, $(x; y) = (3; 7)$ értékeket behelyettesítve a, b, c-re kapunk kapunk 3 egyenletet, amit megoldunk, és kapjuk a parabola egyenletét.
Egy másik lehetőség, hogy "elforgatjuk a fejünket". Általában ahhoz vagyunk szokva, hogy y-t fejezzük ki x-szel, mint egy függvényt. Most pont fordítva van. De ha átállítjuk a nézőpontunkat, azonnal látjuk, hogy ez y-ban egy másodfokú kifejezés, aminek pont tudjuk a két gyökét (azaz, hogy hol metszi az y-tengelyt: 1-ben, illetve 13-ban. Ez alapján szorzattá lehet bontani, vagyis az egyenlete $x = a(y-1)(y-13)$ lesz. a értékét pedig megkapjuk, ha behelyettesítünk $(3; 7)$-et: $3 = a(7-1)(7-13) = -36a$, azaz $a = -\frac{1}{12}$.
Egy harmadik lehetőség, hogy nem vesszük észre, hogy hol metszi az y-tengelyt, hanem egyből a tengelypontból olvassuk le, hogy $x - 3 = a(y - 7)^2$ lesz az egyenelete. Ha ezt megint úgy rendezzük, hogy $x =$ y-ban másodfokú kifejezés, akkor ennek a két gyökét paraméteresen kiszámolva, és kivonva egymásból, kapunk egy egyenletet a-ra.

35. Egy parabolatükör átmérője 20 cm, mélysége 5 cm. Mekkora a fókusztávolsága?
Megoldás: TODO

36. Az $y = x^2$ parabola melyik húrjának felezőpontja az $(1; 4)$ pont?
Megoldás: TODO

3.2. Csapatverseny feladatok

Cs/1. Mi a tengelypontja az $y = -3x^2 + 2x + 5$ egyenletű parabolának?

Cs/2. Mi a tengelypontja az $x = (y + 3)^2 - 2$ egyenletű parabolának?

Cs/3. Mi a tengelypontja az $x - y = (x + 1)^2$ egyenletű parabolának?

Cs/4. Az $y = 10x+3$ egyenesből az $y = x^2$ parabola kimetsz egy húrt. Mi ennek a húrnak a felezőpontja?

Cs/5. Hol vannak azok a pontok a síkon, melyek a $(0; 1)$-től 1-gyel messzebb vannak, mint az x-tengelytől?

Megoldás: TODO

3.3. Érintők külső pontból

37. A $P = (1; 0)$ ponton át hány olyan egyenes van, melynek pontosan 1 közös pontja van az $y = x^2$ parabolával?

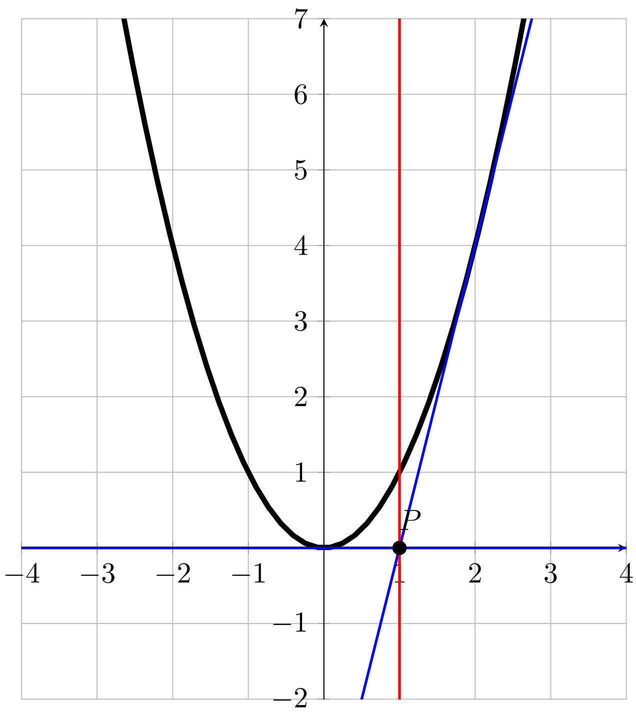
Megoldás: Az $(1; 0)$-n átmenő összes egyenes olyan alakú, hogy $y - 0 = m(x - 1)$, kivéve a függőleges, azaz az $x = 1$.
Az első megállapításunk, hogy ez a függőleges persze 1 pontban metszi a parabolát, hiszen ha behelyettesítünk: $y = 1^2$, látjuk, hogy csak egy lehetséges megoldás van, az $(1; 1)$ pont.
Most nézzük meg $y - 0 = m(x - 1)$ hol metszi $y = x^2$-et. y-t behelyettesítve a

$$0 = x^2 - mx + m$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Mit is jelent ennek a két megoldása? Azok a parabola és az egyenes két metszéspontjának lesznek x-koordinátái, már ha léteznek (értsd: valósak). Ha nem léteznek, akkor persze egy metszéspontjuk sincs. Ha viszont két különböző gyöke is van az egyenletnek, akkor az két metszéspontot eredményez. Tehát nekünk az kell, hogy a két gyök egybeessen, azaz a diszkrimináns 0 legyen:

$$0 = D = m^2 - 4m = m(m - 4).$$

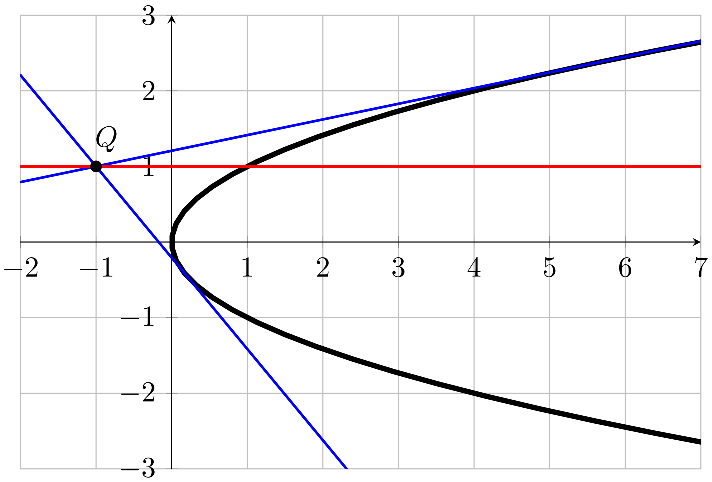
Ez alapján $m = 0$, illetve $m = 4$ esetén kapunk érintőket.



18. ábra. 2 érintő, és 1 nem annyira érintő

Megjegyzés: Bár 3 egyenest is kaptunk (lásd 18. ábra), amiknek csak 1 közös pontja van a parabolával, ezek közül csak kettőt nevezünk érintőnek, amik... hát... "érintik". A tengellyel párhuzamos egyenes bár szintén egy pontban metszi, ő a parabola egyik oldaláról átmegy a másikra, míg az érintőktől azt várjuk, hogy végig az alakzat egyik oldalán maradjanak.

Egy pillanatra gondoljuk csak meg ugyanezt a kérdést, kicsit más felállásban. Mondjuk az $x = y^2$ parabolához akarunk egy közös ponttal rendelkező egyeneseket húzni a $Q = (-1; 1)$ pontból. (Lásd 19. ábra.)



19. ábra.

Most is látjuk, hogy a tengellyel párhuzamos egyenes jó lesz, illetve két "rendes" érintőre számítunk. Mivel most a függőleges egyenes nem lesz jó, ezért mindhármat meg kell kapnunk $y - 1 = m(x + 1)$ alakban. Álljunk is neki!
Ebből mondjuk y-t kifejezve: $y = m(x + 1) + 1$, ezt beírva $x = y^2$-be:

$$\begin{aligned} x &= (mx + m + 1)^2 \\ 0 &= m^2x^2 + (2m(m + 1) - 1)x + (m + 1)^2 \end{aligned}$$

Ha ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa 0, akkor kapunk érintőt:

$$0 = D = (2m(m + 1) - 1)^2 + 4m^2(m + 1)^2 = -4m(m + 1) + 1 = -4m^2 - 4m + 1$$

Tehát ennek a másodfokúnak a két megoldása adja a két érintőt... Na, de várjunk csak! Nem három megoldást kéne kapnunk? Hol veszítettük el az egyiket? (Ezen érdemes elgondolkodni.)
Ott, hogy ez az x-ben másodfokú egyenlet valójában nem mindig másodfokú. Ha $m = 0$, akkor csak elsőfokú lesz, aminek természetes, hogy csak egy megoldása van. Vagyis a harmadik egyenest így kapjuk meg. És így kicsit jobban is értjük, hogy miben más ez, mint a két érintő. Az érintőnek ugyanis két "metszéspontja" van a parabolával (két gyöke a másodfokúnak), csak ezek egybeesnek, míg ennek a harmadik egyenesnek mindössze egy (mivel elsőfokú egyenletet kell megoldanunk).
Igazából mindegy is volt, melyik Q pontot vesszük, mindig a parabola tengelyével párhuzamos egyenes lesz az, amelyik elsőfokút ad. Hoppá! Ez segíthet minket a "ferde parabola" (17. ábra) rejtélyének megoldásában! Álljunk csak be egy külső pontba, mondjuk $(3; 0)$ annak tűnik az ábrán. Az ezen átmenő egyenesek egyenlete $y = m(x - 3)$, kivéve a függőlegest, de az tudjuk, hogy nem lesz a tengely iránya. Ha ezt behelyettesítjük a parabola egyenletébe:

$$\begin{aligned} y - x &= (x + y)^2 \\ m(x - 3) - x &= (x + m(x - 3))^2 \\ 0 &= ((m + 1)x - 3m))^2 - x(m - 1) + 3m \\ 0 &= (m + 1)^2x^2 - (6m(m + 1)^2 + (m - 1))x + 9m^2 + 3m \end{aligned}$$

Ha ennek a diszkriminánsa 0, akkor kapjuk a két érintőt, de minket most nem ez érdekel. Hanem, hogy mikor lesz ez elsőfokú. Hát akkor, ha $(m + 1)^2 = 0$, azaz $m = -1$. Vagyis most már látjuk, hogy a parabola tengelye 45°-os szöget zár be a koordináta-tengelyekkel. Abban azért még nem lehetünk biztosak, hogy pontosan melyik egyenesről is van szó, de erre még a 4.1. fejezetben visszatérünk.

38. Melyik az az egyenes, amelyik párhuzamos a $3x - 2y = 10$ egyenletű egyenessel, és egy közös pontja van az $y^2 = 4x$ parabolával?

Megoldás: TODO

39. Melyek azok a pontok, ahonnan az $y = x^2$ parabolához húzott két érintő merőleges?

Megoldás: Vegyük fel az $(a; b)$ pontot. Az ezen a ponton átmenő egyenesek egyenlete $y-b = m(x-a)$, kivéve a függőlegest, ami biztosan nem érintő. Tehát az ebből kifejezett $y = mx - (ma - b)$-t beírva $y = x^2$-be:

$$mx - (ma - b) = x^2$$
$$0 = x^2 - mx - (ma + b)$$

Ha ennek az x-ben másodfokú kifejezésnek a két gyöke egybeesik, akkor beszélhetük érintőről. Vagyis írjuk fel a diszkriminiánst:

$$0 = D_x = m^2 + 4(ma + b) = m^2 + 4ma + 4b. \tag{8}$$

Ennek az m-ben másodfokú egyenletnek az m_1 és m_2 megoldásai adják a két érintő meredekségét. Ha azt szeretnénk, hogy ezek merőlegesek legyenek, az kell, hogy $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, azaz $m_1 m_2 = -1$. Ezt pedige a Viéte-formulák segítségével könnyen meg tudjuk mondani:

$$-1 = m_1 m_2 = \frac{4b}{1}.$$

Vagyis az kell, hogy $b = -\frac{1}{4}$ (elemi geometriai nyelven: a vezéregyenesre essen).
Ha ezt visszahelyettesítjük, és megnézzük a számolást, tényleg azt kapjuk, hogy ez minden esetben jó. Az egyetlen necces pont, hogy (8) egyenletnek tényleg van-e két (valós) gyöke. Mert ha csak két komplex gyöke lenne, azoknak a szorzata is tudna -1 lenni, csak nem jelentenének érintőt. $0 = m^2 + 4ma - 1$ diszkriminánsa:

$$D_m = 16a^2 + 4,$$

ami szerencsére mindig pozitív. Vagyis valóban mindig létezik a két érintő, és azok merőlegesek is lesznek.

40. Az y-tengellyel párhuzamos tengelyű, $(-1; 3)$ tengelypontú parabola egyik érintője $y = 2x$. Mi a parabola egyenlete?

Megoldás: TODO

3.4. Érintő a parabola egy pontjából, felébehelyettesítés

41. Az $y = x^2$ parabola egyik pontja $(x_0; y_0)$. Mi az ebben a pontban húzott érintő egyenlete?

Megoldás: Az $(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenesek egyenletei: $y - y_0 = m(x - x_0)$, kivéve a függőlegest, de azt már láttuk, hogy nem lehet érintő. Az kéne nekünk, hogy egy megfelelő m-re egy metszéspontja legyen csak a parabolának és az egyenesnek. Az egyenes egyenletéből y-t kifejezve, és behelyettesítve a parabolába:

$$m(x - x_0) + y_0 = x^2$$
$$0 = x^2 - mx + (mx_0 - y_0)$$

Nekünk egy olyan m kell, hogy ennek a másodfokúnak a két gyöke egybeessen, vagyis a diszkrimináns 0 legyen:

$$0 = D = m^2 - 4(mx_0 - y_0) = m^2 - 4mx_0 + 4x_0^2 = (m - 2x_0)^2$$

Vagyis az $m = 2x_0$ meredekségű egyenes lesz az érintő, azaz

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0). \tag{9}$$

Megjegyzés: Nézzünk csak vissza a 2.3. fejezetre. Ha alaposan megvizsgáljuk, hogy milyen jellegű tagokból mit kaptunk, a 3. táblázatot készíthejük el:

Tag	Felébehelyettesítés után
Ax^2	$A(x \cdot x_0)$
By^2	$B(y \cdot y_0)$
Cx	$C(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_0)$
Dy	$D(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_0)$
E	E

3. táblázat. Felébehelyettesítés

Vajon ha a parabola egy $(x_0; y_0)$ pontjára alkalmazzuk ugyanezt a felébehelyettesítést, szintén az érintőt kapjuk?
$y = x^2$ egyenletbe $(x_0; y_0)$ felébehelyettesítése:

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_0 = x \cdot x_0. \tag{10}$$

Vajon (9) és (10) ugyanazt az egyenest írja le?
Rendezzük mindkettőt y-ra:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= 2x_0(x - x_0) \\ y &= 2x_0x - 2x_0^2 + y_0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_0 &= x \cdot x_0 \\ y &= 2x \cdot x_0 - y_0 \end{aligned}$$

Az x-es tag eghyütthatója ekkor ugyanaz, csak az a kérdés, hogy a konstans tag is ugyanez-e?

$$\begin{aligned} -2x_0^2 + y_0 &= -y_0 \\ 2y_0 &= 2x_0^2 \\ y_0 &= x_0^2 \end{aligned}$$

Ezt pedig igaz, hiszen $(x_0; y_0)$ rajta van a parabolán.
A felébehelyettesítés működik minden nem elfajuló másodfokú görbére, erre a 7. fejezetben visszatérünk még.

3.5. Két parabola

42. Két egymásra merőleges tengelyű parabola 4 pontban metszi egymást. Bizonyítsd be, hogy ez a 4 pont egy körön van.

Megoldás: Feltehetjük, hogy az egyik az x-tengellyel párhuzamos tengelyű, a másik az y-tengellyel. Ekkor az egyenletük $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$, illetve $x = a_2y^2 + b_2y + c_2$ alakú, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ valamilyen valós számok, és $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Tudjuk, hogy ha ezekbe egy $A = (x_1; y_1)$ metszéspont koordinátáit behelyettesítjük, akkor mindkét esetben 0-t kapunk. Emiatt ha ezeket az egyenleteket bármilyen súlyokkal is adnánk össze, ugyanúgy 0 lenne a behelyettesítés eredménye.
Vegyük hát az elsőnek az $\frac{1}{a_1}$, a második az $\frac{1}{a_2}$-szeresét:

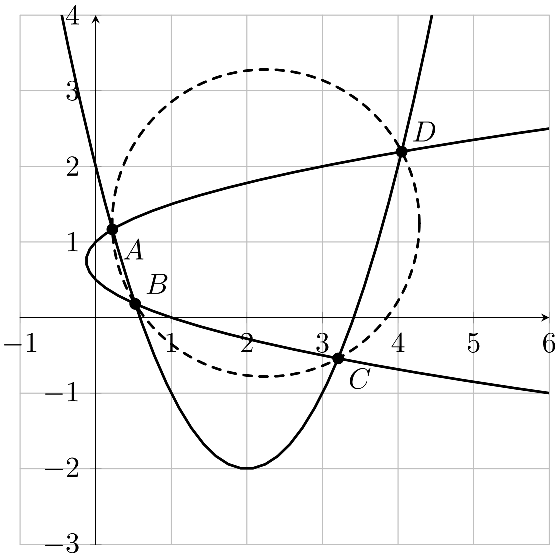
$$\frac{1}{a_1}y + \frac{1}{a_2}x = x^2 + \frac{b_1}{a_1}x + \frac{c_1}{a_1} + y^2 + \frac{b_2}{a_2}y + \frac{c_2}{a_2}.$$

Ez átrendezve:

$$0 = x^2 + y^2 + \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x + \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)y + \left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2}\right).$$

Ez pedig egy körnek lesz az egyenlete. Vagy egy pontkörnek, vagy egy képzetes körnek (üres halmaznak). De mivel a 4 különböző metszéspontról tudjuk, hogy rajta van ezen az alakzaton, ezért csak egy kör lehet.

Megjegyzés: Az egyenessorokhoz, illetve körsorokhoz hasonló ötletet csináltunk. A két parabolának vettük a sorát[1], és észrevettük, hogy van köztük egy kör.



20. ábra. 2 parabola 4 metszéspontja

4. Ellipszisek

Definíció: Azon pontok halmazát, melyek két adott (fókusz)ponttól (angolul *focal points* vagy *foci*) vett távolságösszege állandó, *ellipszisnek* (angolul *ellipse*) nevezzük.

43. Hol vannak azok a $P = (x; y)$ pontok a síkon, melyek távolságösszege az $F_1 = (3; 0)$ és $F_2 = (-3; 0)$ ponttól $d = 10$?

Megoldás: Az eddigi tudásunk alapján persze a

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10 \tag{11}$$

egyenlet leírja ezen pontok halmazát. De alakítsuk ezt egy kicsit át, hogy szebben nézzen ki. Emeljünk először négyzetre:

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 + (x+3)^2 + (y-0)^2 + 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 100.$$

Rendezve:

$$2\sqrt{(x^2 + y^2 + 9 + 6x)(x^2 + y^2 + 9 - 6x)} = 100 - 2(x^2 + y^2 + 9). \tag{12}$$

Osszunk le 2-vel és emeljünk négyzetre:

$$(x^2 + y^2 + 9)^2 - (6x)^2 = 50^2 - 100(x^2 + y^2 + 9) + (x^2 + y^2 + 9)^2.$$

[1]Angolul *pencil of conics*, magyarul leginkább **kúpszeletsor**nak szokás hívni. Egyébként ez egy nagyon szép irány, kár, hogy csak egy lábjegyzet jutott neki. Lásd még: https://en.wikipedia.org/wiki/Pencil_(geometry)

Szerencsére $(x^2 + y^2 + 9)^2$ kiesik, ami pedig marad, azt tagonként rendezzük:

$$64x^2 + 100y^2 = 1600,$$

azaz

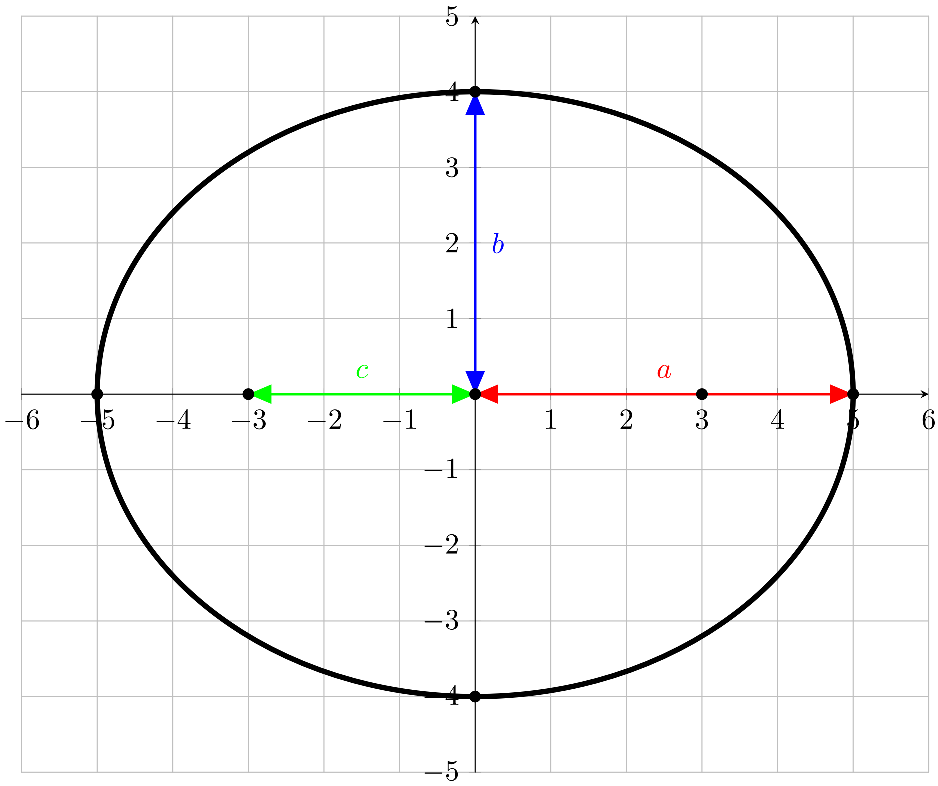
$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1.$$

Ez azért tényleg szebb alaknak tűnik, mint amiből kiindultunk. De tényleg ugyanazt a halmazt írja le? A lépéseink nagy része ekvivalens átlakítás volt, de kétszer négyzetre emeltünk. Ott nem jöhettek be plusz pontok?

Az első négyzetre emelésnél – (11) egyenletnél – láthatóan mindkét oldal pozitív, így ott tényleg ekvivalens az átalakítás.

A második négyzetre emelésnél – (12) egyenletnél – már nem ennyire triviális a helyzet. Ehhez érdemes megnézni, hogy a jobb oldalt hogyan kaptuk. Valójában a $100 - |PF_1|^2 - |PF_2|^2$ jelenik ott meg. Ez pedig kénytelen nem-negatív lenni, hiszen

$$10^2 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1||PF_2| \geq |PF_1|^2 + |PF_2|^2.$$



21. ábra. Kistengely, nagytengely

Definíció: Az a húr, mely a két fókuszponton halad át, a *nagytengely* (angolul *major axis*). A nagytengely az ellipszis leghosszabb húrja. A fókuszok felezőpontján a nagytengelyre merőlegesen állított egyenes által meghatározott húr a *kistengely* (angolul *minor axis*). Féltengely a tengelyek fele, beszélünk fél nagytengelyről (a 21. ábrán a) és fél kistengelyről (az ábrán b). A fókuszpontok távolságának a fele c. Ezek angolul *semi-major axis*, *semi-minor axis*, illetve *focal distance*.

Ekkor a három paraméter között fennáll, hogy $a^2 = b^2 + c^2$. Az előző feladatban $d = 2a = 10$, $c = 3$ volt. Mi a helyzet általában?

44. Hol vannak azok a pontok a síkon, melyek távolságösszege az $F_1 = (c; 0)$ és $F_2 = (-c; 0)$ ponttól $2a$?

Megoldás: Igazából az előző megoldást visszük végig újra. A lépések ugyanúgy ekvivalens átalakítások lesznek.

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(c+3)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2$$

$$2\sqrt{\left(x^2+y^2+c^2+2cx\right)\left(x^2+y^2+c^2-2cx\right)}=4a^2-2\left(x^2+y^2+c^2\right)$$

$$\left(x^2+y^2+c^2\right)^2-(2cx)^2=\left(2a^2\right)^2-4a^2\left(x^2+y^2+c^2\right)+\left(x^2+y^2+c^2\right)^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+\left(a^2\right)y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

45. Az $\left(\frac{x-69}{5}\right)^2+\left(\frac{y-420}{4}\right)^2=1$ ellipszisnek hol vannak a fókuszpontjai?

Megoldás: Vezessük be az

$$x'=x-69 \qquad\qquad y'=y-420 \tag{13}$$

koordinátákkal leírható új (bordó) koordináta-rendszert. Amit bordóval jelölünk, az ebben az eltolt koordináta-rendszerben történik.

Ebben az ellipszis egyenlete $\left(\frac{x'}{5}\right)^2+\left(\frac{y'}{4}\right)^2=1$. Ennek pedig tudjuk a fókuszpontjait: $(3;0)$ és $(-3;0)$. (13)-ből könnyű visszaszámolni, hogy

$$x=x'+69 \qquad\qquad y=y'+420 \tag{14}$$

Vagyis az eredeti koordináta-rendszerben a két fókuszpont $(66;420)$ és $(72;420)$.

46. Az $\left(\frac{x}{12}\right)^2+\left(\frac{y}{13}\right)^2=1$ ellipszisnek hol vannak a fókuszpontjai?

Megoldás: Most $a=12<13=b$, ami azt jelenti, hogy a b lesz a félnagytengely, és a a félkistengely. Tehát a fókuszpontok nem az x-tengelyre esnek, hanem az y-tengelyre.

$$c^2=b^2-a^2=13^2-12^2=5^2,$$

vagyis a két fókuszpont a $(0;5)$ és $(0;-5)$.

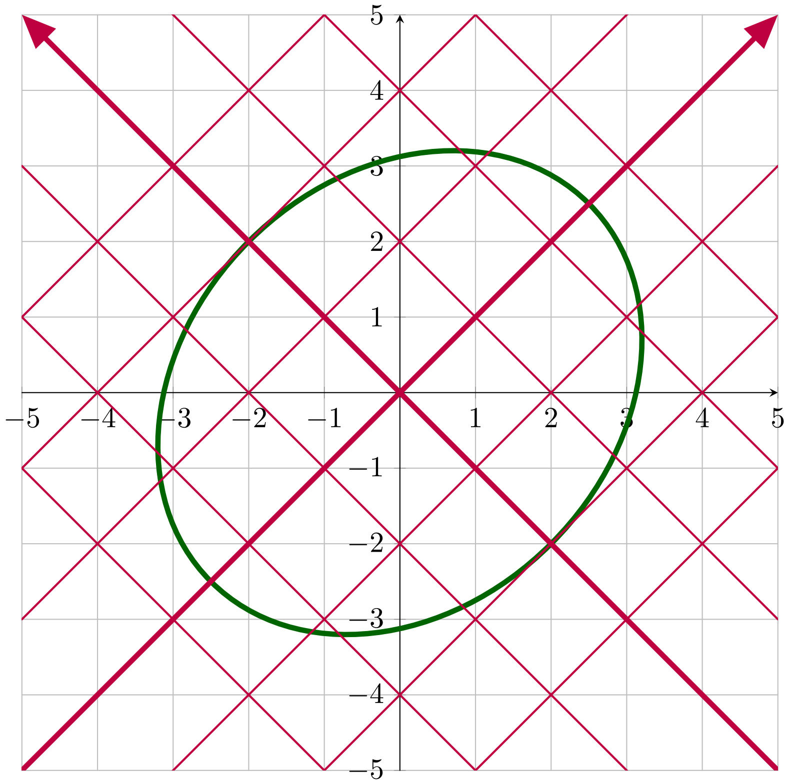
4.1. Elforgatott koordináta-rendszerek

47. Az $\left(\frac{x+y}{5}\right)^2+\left(\frac{x-y}{4}\right)^2=1$ ellipszisnek hol vannak a fókuszpontjai?

Megoldás: Eddig az ellipszisek egyenletében az x és y valahogy a tengelyekre utalt. Hátha most is az $x+y$, illetve $x-y$ a tengelyeket jelöli valamilyen módon. Az $x+y=0$, illetve $x-y=0$ egyenesek épp az eredeti koordináta-tengelyek szögfelezői. Próbáljuk elforgatni a koordináta-tengelyeket 45°-kal, és nézzük meg, hogy mit kapunk így.

A 22. ábrán látható módon vegyük fel az új koordináta-rendszerünket. Ebben $x'=y-x$ és $y'=x+y$. Például az eredetileg $(0;2)$ pont új koordinátái így $(1;1)$.

Ám ezzel lesz egy kis baj! Eddig a $(0;2)$ az origótól 2 távolságra volt, az új koordináta-rendszerben viszont $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ távolságra van. Ez azt jelenti, hogy nem csak elforgattuk, hanem meg is nyújtottuk az eredeti koordináta-rendszerünket. És persze, igazából semmi okunk nem volt feltételezni, hogy az új tengelyeink beosztása az pont az, amit írtunk. A szép érzékünk diktálta ezt, de hát becsapott minket.



22. ábra. 1. próbálkozás

Ahhoz hogy megértsük, mik lesznek az új koordináták, értsük meg a régieket. Mit is jelentenek ezek? Hát az első koordináta azt, hogy milyen messze van a pont az y-tengelytől, azaz az $y = 0$ egyenestől. A második pedig azt, hogy milyen messze vagyunk az x-tengelytől, azaz az $x = 0$ egyenestől. Pont és egyenes távolságát pedig már régóta (lásd 11. feladat) tudunk számolni. Ez esetben az $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0$, illetve $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0$ egyenletekbe kellett behelyettesíteni a koordinátákat. Ezek szerint erre lesz szükségünk az új koordináta-rendszerben is.
Vagyis az $x + y = 0$, illetve $x - y = 0$ egyenletek helyett vegyük az $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = 0$, illetve $\frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) = 0$. Ebbe behelyettesítve már a valódi távolságot kell megkapnunk. A második egyenletben pedig azért váltottunk előjelet, hogy jó irányba legyen a pozitív irány. (Például $(-1; 1)$-re azt szeretnénk, hogy $(\text{poz}; 0)$ legyen.) Ez alapján az elforgatott koordináta-rendszerben (lásd 23. ábra).

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) \tag{15}$$

Tehát az $\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{4}\right)^2 = 1$ ellipszis egyenlete az új koordináta-rendszerben

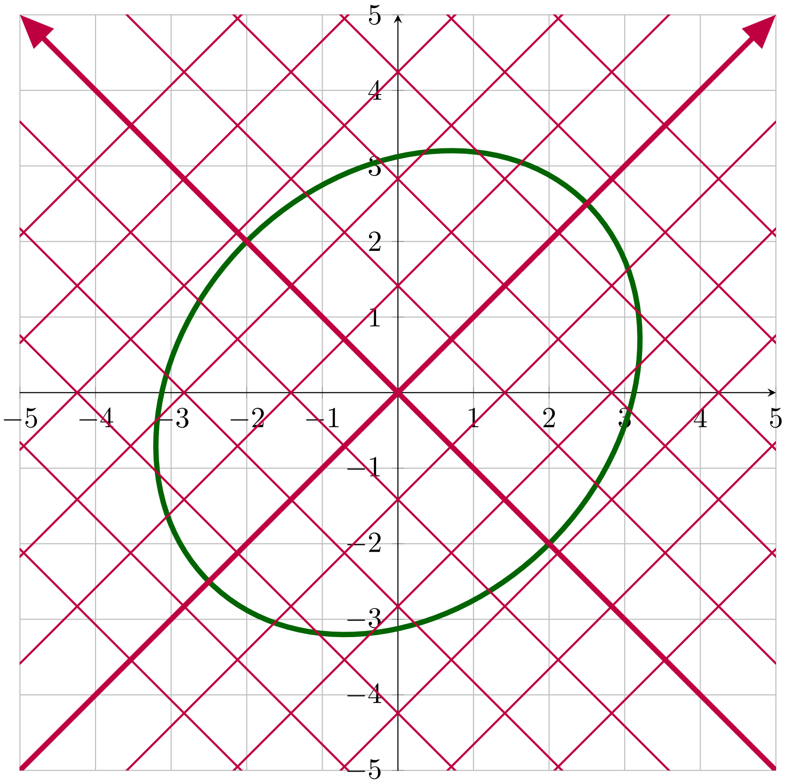
$$\left(\frac{\sqrt{2}x'}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}y'}{4}\right)^2 = 1,$$

átrendezve:

$$\left(\frac{x'}{5/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{4/\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Így pedig azonnal le tudjuk olvasni, hogy ebben a koordináta-rendszerben $a = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Vagyis a fókuszpontok $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 0\right)$ és $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; 0\right)$.
(15)-ből nem nehéz visszaszámolni, hogy

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \tag{16}$$



23. ábra. 2. próbálkozás

Ennek segítségével az eredeti koordináta-rendszerben a fókuszpontok koordinátái $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Megjegyzés: Nézzünk csak vissza a 17. ábrán látható ferde parabolánkra ($y - x = (x + y)^2$). Mostmár van esélyünk megmondani az adatait. Ha ugyanúgy a (15) és (16) képleteket használjuk, akkor az új koordináta-rendszerben

$$\sqrt{2}y' = \left(\sqrt{2}x'\right)^2,$$

azaz

$$y' = \sqrt{2}x'^2.$$

Ez alapján a tengelypontja az origó, a főegyütthatója $\sqrt{2}$, tehát a paramétere $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Vagyis $\frac{1}{4\sqrt{2}}$-vel van "feljebb" a fókuszpont, és ennyivel "lejjebb" a vezéregyenes. Azaz

$$\left(0; \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

a fókuszpont, és

$$y' = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

a vezéregyenes. Ez pedig az eredeti koordináta-rendszerben a

$$\left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$$

pont, illetve az

$$y - x = -\frac{1}{8}$$

egyenes.

Megjegyzés: Érdemes meggondolni, hogy ha nem 45°-kal, hanem egy α szöggel forgatjuk el a koordinátarendszerünket, akkor mi lesz a két koordináta-tengely. Az egyenesek meredekségét nem nehéz meghatározni, majd annak keresni a lenormált egyenletét, és így megkapjuk, hogy:

$$x' = (\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y \qquad y' = -(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \tag{17}$$

Visszafelé:

$$x = (\cos\alpha)x' - (\sin\alpha)y' \qquad y = (\sin\alpha)x' + (\cos\alpha)y' \tag{18}$$

5. Hiperbolák

Definíció: Azon pontok halmazát, melyek két adott (fókusz)ponttól vett távolságkülönbsége állandó, *hiperbolának* (angolul *hyperbola*) nevezzük.

48. Hol vannak azok a $P = (x; y)$ pontok a síkon, melyek távolságkülönbsége az $F_1 = (5; 0)$ és $F_2 = (-5; 0)$ ponttól $d = 6$?
(A bizonyításunk nagyon szépen rímelni fog az ellipszises hasonló számolásra.)
Az eddigi tudásunk alapján persze a

$$\left|\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2}\right| = 6 \tag{19}$$

egyenlet leírja ezen pontok halmazát. De alakítsuk ezt egy kicsit át, hogy szebben nézzen ki. Emeljünk először négyzetre:

$$(x-5)^2 + (y-0)^2 + (x+5)^2 + (y-0)^2 - 2\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}\sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} = 36.$$

Rendezve:

$$2\sqrt{(x^2 + y^2 + 25 + 10x)(x^2 + y^2 + 25 - 10x)} = -36 + 2(x^2 + y^2 + 25). \tag{20}$$

Osszunk le 2-vel és emeljünk négyzetre:

$$(x^2 + y^2 + 25)^2 - (10x)^2 = 18^2 - 36(x^2 + y^2 + 25) + (x^2 + y^2 + 25)^2.$$

Szerencsére $(x^2 + y^2 + 25)^2$ kiesik, ami pedig marad, azt tagonként rendezzük:

$$576 = 64x^2 - 36y^2,$$

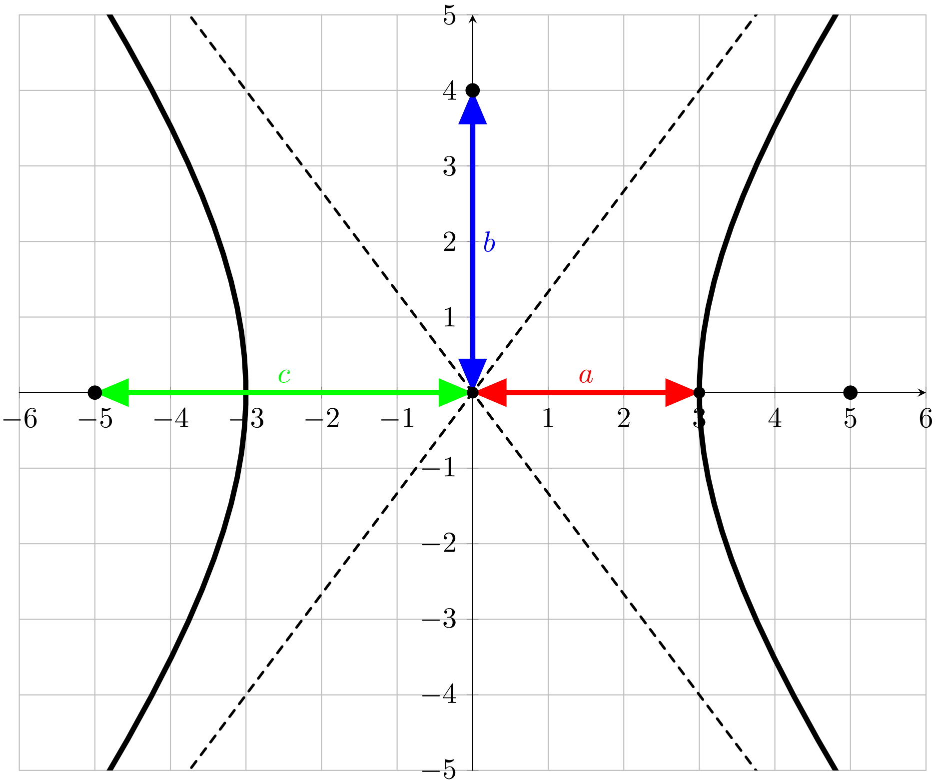
azaz

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1.$$

Ez azért tényleg szebb alaknak tűnik, mint amiből kiindultunk. De tényleg ugyanazt a halmazt írja le? A lépéseink nagy része ekvivalens átlakítás volt, de kétszer négyzetre emeltünk. Ott nem jöhettek be plusz pontok?
Az első négyzetre emelésnél – (19) egyenletnél – láthatóan mindkét oldal pozitív, így ott tényleg ekvivalens az átalakítás. Egyébként ha nem lenne ott az abszolútérték, nem is lenne ekvivalens az átalakítás. A hiperbola két ága közül úgy csak az egyiket fejezné ki a képlet.
A második négyzetre emelésnél – (20) egyenletnél – már nem ennyire triviális a helyzet. Ehhez érdemes megnézni, hogy a jobb oldalt hogyan kaptuk. Valójában a $-36 + |PF_1|^2 + |PF_2|^2$ jelenik ott meg. Ez pedig kénytelen nem-negatív lenni, hiszen

$$6^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| \leq |PF_1|^2 + |PF_2|^2.$$

Definíció: A hiperbolának két szimmetriatengelye van: a két fókuszpontot összekötő egyenes, illetve a felezőmerőlegesük. A két fókuszpontot összekötő egyenesnek a hiperbolával két közös pontja van. Az



24. ábra. Valós tengely, képzetes tengely

ezek által meghatározott szakaszt a hiperbola *valós tengelyének* nevezzük (angolul *major axis* vagy *transverse axis*), hosszát $2a$-val jelöljük. (Lásd 24. ábra.)
A szimmetria-középpont és fókuszpontok távolságát jelöljük c-vel.
A hiperbola másik szimmetriatengelyén, az szakasz felezőmerőlegesén, a hiperbolának nincs pontja. Az ellipszisnél látottak mintájára azonban bevezethetünk egy szakaszt, amely megfelel az ellipszis kistengelyének.
A valós tengely egyik végpontjából c sugarú körívvel metsszük el a másik szimmetriatengelyt. A kapott szakaszt a hiperbola *képzetes tengelyének* nevezzük (angolul *minor axis* vagy *conjugate axis*). Felének hosszát b-vel jelöljük.
Ekkor a három paraméter között fennáll, hogy $a^2 + b^2 = c^2$. Az előző feladatban $d = 2a = 6$, $c = 5$ volt. Mi a helyzet általában?

49. Hol vannak azok a pontok a síkon, melyek távolságkülönbsége az $F_1 = (c; 0)$ és $F_2 = (-c; 0)$ ponttól $2a$?

Megoldás: Az előző feladat számolása most is teljes mértékig lemásolható. A végeredmény

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

lesz. Ez azt is mutatja, hogy b definíciója elsőre ugyan mesterkéltnek tűnt, de mégis szépen megjelenik a képletben.

50. Az $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ hiperbolát az origón átmenő egyenesek, ha nagyon meredekek, 0 pontban metszik, míg ha nem olyan meredekek, 2 pontban. Hol az átmenet? Mi a helyzet az átmenetnél?

Megoldás: Nézzük az $y = mx$ egyenes és a hiperbola metszéspontjait:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{mx}{4}\right)^2 = 1$$

$$x^2\left(\frac{1}{9} - \frac{m^2}{16}\right) - 1 = 0$$

Ha $\frac{1}{9}-\frac{m^2}{16}>0$, azaz $|m|<\frac{4}{3}$, akkor két olyan valós x van, amire ez teljesül, vagyis két pontban metszi a hiperbolánkat.
Ha $\frac{1}{9}-\frac{m^2}{16}>0$, azaz $|m|>\frac{4}{3}$, akkor ennek a másodfokúnak nincs valós gyöke, vagyis egy pontban sem metszi a hiperbolánkat.
Ha $\frac{1}{9}-\frac{m^2}{16}=0$, azaz $|m|=\frac{4}{3}$, akkor ez nem is egy másodfokú egyenlet lesz x-ben, hiszen a másodfokú tag kiesik. Ami marad:

$$-1=0,$$

ami viszont semmilyen x-re nem fog teljesülni.

Megjegyzés: Azt a két egyenest, melyhez a hiperbola egyre jobban hozzásimul, *aszimptotáknak* nevezzük. Általában, az $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ hiperbola két aszimptotája az $y=\frac{b}{a}x$ és $y=-\frac{b}{a}x$ egyenesek.

51. Amikor kicsik voltunk, azt mondták nekünk, hogy az $y=\frac{1}{x}$ alakzat egy hiperbola. Vajon tényleg az? Ha igen, hol vannak a fókuszpontjai?

Megoldás: Először is, az $xy=1$ alakzattal fogunk foglalkozni, mert ez olyan másodfokúnak néz ki, mint amikkel eddig foglalkoztunk.
A két aszimptota valószínűleg az x-tengely és az y-tengely lesz. Vagyis ha 45°-kal elforgatnánk a koordináta-rendszerünket, remélhetőleg épp a két szimmteria-tengely lesz a két koordináta-tengely. A (15) és a (16) egyenleteket fojuk használni. Ezek segítségével

$$1=xy=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'-y'\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'+y'\right)=\frac{1}{2}\left(x'^2-y'^2\right)=\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Vagyis $a=b=\sqrt{2}$, így $c=2$, azaz $(2;0)$ és $(-2;0)$ a két fókuszpont. Ezek az eredeti koordináta-rendszerben a $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ pontok.

Definíció: Egy hiperbolát, ha a két aszimptotája merőleges, *derékszögű hiperbolának*, *egyenlő szárú hiperbolának*, néha *egyenlő oldalú hiperbolának* nevezünk. Angolul *rectangular hyperbola* vagy *equilateral hyperbola*.

52. a) Az $xy=1$ hiperbolán vegyünk fel három pontot: A,B,C. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög M magasságpontja is rajta van a hiperbolán.
b) Bizonyítsd be, hogy az M tükörképe az origóra rajta van az ABC háromszög köré írt körén.
c) Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög Feuerbach-köre átmegy az origón.

Megoldás: TODO

6. Minek nevezzelek?

Szedjük össze, milyen (legfeljebb) másodfokú alakzatokról tanultunk. Ez alatt azt értjük, hogy egyenlete

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{21}$$

alakú, esetleg néhány együttható 0.
Az eddig tanultakat a 4. táblázat 1.-9. sorába írtuk össze. Ezen kívül még két egyenes egyenletének szorzata is másodfokút ad, így a 10.-12. sorokkal még ki tudjuk egészíteni a táblázatunkat.
Ezek közül valójában az 1.-3. sorok nem másodfokúak, legfeljebb elsőfokúak, azaz $A=B=C=0$.
A másodfokúak közül pedig elfajuló esetnek nevezzük az 5.-6., illetve 10.-12. sorokban lévőket.
A továbbiakban a képzetes köröket és a pontköröket körökként fogjuk kezelni. Őket könnyű felismerni, mert náluk $B=0$, és $A=C$. Ezek után viszont már ezeket az ellipszisek speciális eseteként fogjuk kezelni.
A célunk ebben a fejezetben, hogy az együtthatók alapján eldöntsük, hogy egy nem-elfajuló másodfokú alakzat valójában ellipszis, parabola vagy hiperbola.
Az hogy másodfokú, azt jelenti, hogy A, B és C közül legalább az egyik nem 0. A nem-elfajultságot kezdetben csak feltesszük, de a végén ejtünk majd róla pár szót.

sorszám	név	példák
1.	egyenes	$x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$
2.	sík	$0x+0y+0=0$
3.	üres halmaz	$0x+0y+0=1$
4.	kör	$x^2+y^2=1$
5.	pont(kör)	$x^2+y^2=0$
6.	képzetes kör	$x^2+y^2=-1$
7.	parabola	$y=x^2$, $x=y^2$, $(y-x)=(x+y)^2$
8.	ellipszis	$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$, $\left(\frac{x+y}{5}\right)^2+\left(\frac{x-y}{4}\right)^2=1$
9.	hiperbola	$\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$, $xy=1$
10.	két egymást metsző egyenes	$xy=0$, $x^2-y^2=0$
11.	két párhuzamos egyenes	$x^2=1$, $(x+y-1)(x+y+3)=0$
12.	két egybeeső egyenes	$x^2=0$, $(x+y-1)^2=0$

4. táblázat. Másodfokú alakzatok

53. Ha $B^2-4AC<0$, akkor ellipszis, ha $B^2-4AC=0$, akkor parabola, ha $B^2-4AC>0$, akkor ellipszisről van szó.

Megoldás: A 37. és az 50. feladatoknál használt ötletet fogjuk alkalmazni. Ha mondjuk az origóba beállunk, akkor arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány olyan egyenes van, amivel az alakzat metszéspontjait kiszámoló másodfokú egyenlet mégsem lesz másodfokú. Hiperbolánál 2 ilyen van (a két aszimptota irányában), parabolánál 1 ilyen van (a tengely irányába), míg ellipszisnél 0 ilyen van. Ezekben az irányokban "fut ki a végtelenbe" az alakzat. (A projektív geometriában jártasaknak: ezek az ideális pontok vannak rajta az alakzaton.)
Az origón átmenő egyenesek egyenletei $y=mx$, illetve az $x=0$. Nézzük először, ha $x=0$-t helyettesítünk be (21) egyenletbe:

$$\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F&=0\\ A0^2+B0y+Cy^2+D0+Ey+F&=0\\ Cy^2+Ey+F&=0 \end{aligned}$$

Ez pontosan akkor nem lesz másodfokú, ha $C=0$. Magyarul az y-tengely irányába akkor fut ki a végtelenbe, ha $C=0$. (Ez egybeesik azzal a tapasztalatunkkal, hogy $y=x^2$ vagy $xy=1$ ilyenek.)
Most majd $y=mx$-et fogjuk behelyettesíteni. Megkülönböztetjük a $C=0$, illetve $C\neq 0$ eseteket.
Nézzük meg gyorsan akkor a $C=0$ esetet. Ha (21) egyenletbe $y=mx$-et írunk:

$$\begin{aligned} Ax^2+Bxy+0y^2+Dx+Ey+F&=0\\ Ax^2+Bx(mx)+Dx+E(mx)+F&=0\\ (A+Bm)x^2+(D+Em)x+F&=0 \end{aligned}$$

Ha $B\neq 0$, akkor pontosan egy olyan m lesz, amikor $A+Bm=0$, azaz ebben az esetben két irányban megyünk ki a végtelenbe, tehát hiperbolánk van. És valóban, $B^2-4AC=B^2>0$.
Ha $B=0$, akkor $A\neq 0$ (különben $A=B=C=0$ lenne), így viszont nincsen másik m, amire ez ne lenne másodfokú. Vagyis csak egy irányba megyünk ki a végtelenbe, tehát parabolánk van. És valóban, $B^2-4AC=0-0=0$.
Most nézzük, ha a $C\neq 0$ esetben helyettesítünk be $y=mx$-et:

$$\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F&=0\\ Ax^2+Bx(mx)+C(mx)^2+Dx+E(mx)+F&=0\\ (A+Bm+Cm^2)x^2+(D+Em)x+F&=0 \end{aligned}$$

Ez akkor nem lesz x-ben másodfokú, ha $A+Bm+Cm^2=0$. Mivel most $C\neq 0$, így ennek az m-ben másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa határozza meg a megoldások számát. Vagyis, ha $B^2-4AC>$

0, akkor 2, ha $B^2 - 4AC = 0$, akkor 1, ha $B^2 - 4AC < 0$, akkor 0 olyan m van, aminek az irányában kifutna a végtelenbe. Ez pedig éppen a hiperbola, parabola, ellipszis esetek.

Megjegyzés: A fent leírt módszerrel valójában a megfelelő irányokat is ki tudjuk számolni, amerre az ellipszis, illetve a parabola kifut a végtelenbe. Ezek segítségével pedig el tudjuk forgatni úgy a koordináta-rendszerünket, hogy a szokásos egyenletet kapjuk, azaz a parabola tengelye valamelyik tengely irányába essen, illetve a hiperbola két aszimptotájának szögfelezői legyenek a két tengely. Ekkor a szokásos felírás segítségével az is kiderül, hogy elfajuló esetet kaptunk-e.
$B^2 - 4AC > 0$ esetében ugyanis kaphatunk két egymást metsző egyenest (10. sor), míg $B^2 - 4AC = 0$ esetén két párhuzamos vagy egybeeső egyenest (11-12. sor).
Érdemes meggondolni, hogy általános alakú ellipszis esetében (azaz, amikor $B \neq 0$), hogyan tudjuk megtalálni a tengelyek irányát.
Összefoglalva, amiket kaptunk:

	Elfajuló	Nem elfajuló
$A = B = C = 0$	egyenes	sík, üres halmaz
$B^2 - 4AC > 0$	hiperbola	két egymást metsző egyenes
$B^2 - 4AC = 0$	parabola	két párhuzamos egyenes, két egybeeső egyenes
$B^2 - 4AC < 0$	ellipszis, kör	pont(kör), képzetes kör

5. táblázat. Másodfokú alakzatok csoportosítva

7. Felébehelyettesítés általában

7.1. Általános másodfokú alakzatra

Korábban már a 2.3. fejezetben és a 3.4. fejezetben elkezdtük körbejárni. Akkor még xy-os taggal nem találkoztunk, de mostmár azzal is ki tudjuk egészíteni, és így kapjuk a 6. táblázatot.

Tag	Felébehelyettesítés után
Ax^2	$A(x \cdot x_0)$
Bxy	$B(\frac{1}{2}x \cdot y_0 + \frac{1}{2}x_0 \cdot y)$
Cy^2	$C(y \cdot y_0)$
Dx	$D(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_0)$
Ey	$E(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_0)$
F	F

6. táblázat. Felébehelyettesítés

54. Legyen $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ egy nem elfajuló másodfokú alakzat egyenlete (azaz egy köré, ellipszisé, paraboláé vagy hiperboláé), $P = (x_0; y_0)$ pedig egy pontja. Ekkor a pont felébehelyettesítésével egy olyan egyenest kapunk, mely ebben a pontban érinti az alakzatot.

Megoldás: Azt kell bizonyítanunk, hogy

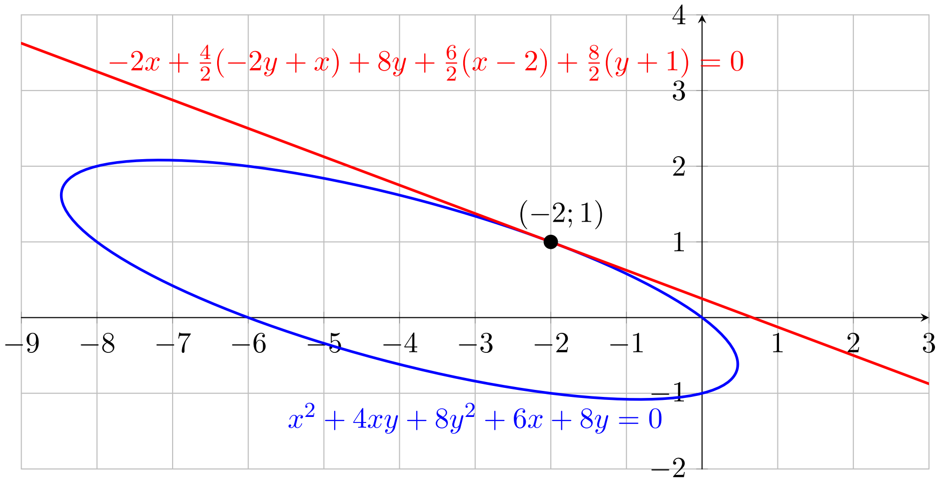
(i) egyenest kapunk;

(ii) átmegy $P = (x_0; y_0)$-on;

(iii) nem megy át az alakzat másik pontján.

Vezessük be az alábbi 4-változós kifejezést:

$$f(u, v, z, w) = A \cdot uz + \frac{1}{2}B \cdot uw + \frac{1}{2}B \cdot zv + C \cdot vw + \frac{1}{2}D \cdot u + \frac{1}{2}D \cdot z + \frac{1}{2}E \cdot v + \frac{1}{2}E \cdot w + F.$$



25. ábra. Egyszerűsítés után $3x + 8y = 2$ lesz az egyenes egyenlete.

Uhh, ezt miért is csináltuk? Valójában $f(x, y, x_0, y_0) = 0$ épp a felébehelyettesítés az eddigi jelöléseinkkel. Az új változókat azért írtuk be, mert szeretnénk néha mást is behelyettesíteni.
Tudatosítsuk magunkban, hogy x, y-ra, mint változókra szeretnénk gondolni, míg x_0, y_0-ra, mint valami konkrét számokra. Ekkor

$$f(x, y, x, y) = 0$$

épp az

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

egyenletet jelöli, vagyis az alakzatunk egyenletét. Mivel $(x_0; y_0)$ rajta van az alakzatunkon, így ez speciálisan azt jelenti, hogy $f(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0$.
(i) Ha

$$f(x, y, x_0, y_0) = 0$$

egyenletet kibontjuk, látjuk, hogy csak x-es, y-os, illetve konstans tagok vannak benne, vagyis egy egyenes lesz. Hát vagy az egész sík, vagy az üres halmaz. (ii) megoldásával ki fogjuk zárni az üres halmazt, (iii) megoldásával pedig a teljes síkot. Az egyszerűség kedvéért egyenesként hivatkozunk rá a továbbiakban.
(ii) Az $f(x, y, x_0, y_0) = 0$ egyenes egyenletébe, ha $x = x_0$, $y = y_0$ értékeket helyettesítünk be, akkor tényleg egyenlőséget kapunk, hiszen azt már korábban észrevettük, hogy $f(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0$. (Azért mert rajta volt a másodfokú alakzaton.) Ez pedig épp azt jelenti, hogy az egyenesen is rajta van.
(iii) Indirekten tegyük fel, hogy $Q = (x_1; y_1)$ is olyan, hogy rajta van a másodfokú alakzaton, és a felébehelyettesítéssel kapott egyenesen is. Előbbi azt jelenti, hogy

$$f(x_1, y_1, x_1, y_1) = 0,$$

míg utóbbi azt, hogy

$$f(x_1, y_1, x_0, y_0) = 0.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor a PQ egyenes minden pontja rajta van a másodfokú alakzatunkon, amiből az következik, hogy elfajuló, ami ellentmond a feltevésünknek.
A PQ egyenes egy tetszőleges pontja felírható

$$(x_2; y_2) = \alpha(x_0; y_0) + (1 - \alpha)(x_1; y_1) = (\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1; \alpha y_0 + (1 - \alpha)y_1)$$

alakban. Azt fogjuk megmutatni, hogy $f(x_2, y_2, x_2, y_2) = 0$, amivel készen leszünk. Ehhez az alábbi segédállítást látjuk be:

$$\begin{aligned} f(x_2,y_2,x_2,y_2) =& f(\alpha x_0+(1-\alpha)x_1, \alpha y_0+(1-\alpha)y_1, \alpha x_0+(1-\alpha)x_1, \alpha y_0+(1-\alpha)y_1) = \\ =&\alpha^2 f(x_0,y_0,x_0,y_0)+2\alpha(1-\alpha)f(x_0,y_0,x_1,y_1)+(1-\alpha)^2 f(x_1,y_1,x_1,y_1) \end{aligned}$$

Ekkor persze készen vagyunk, hiszen itt mindhárom tag külön-külön 0, mint láttuk már. Tehát tényleg csak ezt a "zárójelkibontást" kell belátni. Ezt érdemes tagonként külön vizsgálni, hogy a két oldalon mi történik.

- Ax^2-es tag:

  $$A(\alpha x_0+(1-\alpha)x_1)^2 = \alpha^2 Ax_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)Ax_0x_1 + (1-\alpha)^2 Ax_1^2,$$

  ami simán a zárójelek kibontása.

- Bxy-os tag:

  $$B(\alpha x_0+(1-\alpha)x_1)(\alpha y_0+(1-\alpha)y_1) = \alpha^2 Bx_0y_0 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{B}{2}(x_0y_1+x_1y_0) + (1-\alpha)^2 Bx_1y_1,$$

  ami simán a zárójelek kibontása.

- Cy^2-es tag:

  $$C(\alpha y_0+(1-\alpha)y_1)^2 = \alpha^2 Cy_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)Cy_0y_1 + (1-\alpha)^2 Cy_1^2,$$

  ami simán a zárójelek kibontása.

- Dx-es tag:

  $$D(\alpha x_0+(1-\alpha)x_1) = \alpha^2 Dx_0 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{D}{2}(x_0+x_1) + (1-\alpha)^2 Dx_1,$$

  ahol a jobb oldalt kicsit alakítva:

  $$\begin{aligned} \alpha^2 Dx_0 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{D}{2}(x_0+x_1) + (1-\alpha)^2 Dx_1 =& \\ = Dx_0(\alpha^2+\alpha(1-\alpha)) + Dx_1(\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2) =& \\ = Dx_0\alpha(\alpha+(1-\alpha)) + Dx_1(1-\alpha)(\alpha+(1-\alpha)) =& \\ = Dx_0\alpha + Dx_1(1-\alpha)& \end{aligned}$$

- Ey-os tag:

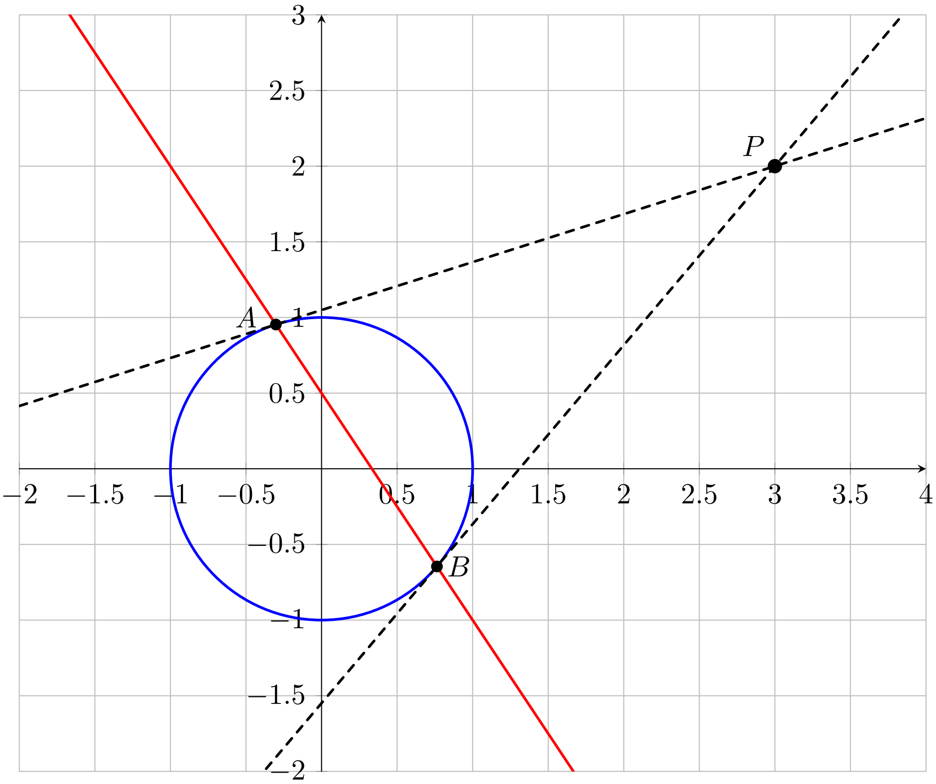
  $$E(\alpha y_0+(1-\alpha)y_1) = \alpha^2 Ey_0 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{E}{2}(y_0+y_1) + (1-\alpha)^2 Ey_1,$$

  ez pont úgy jön ki, mint az előző.

- F-es tag:

  $$F = \alpha^2 F + 2\alpha(1-\alpha)F + (1-\alpha)^2 F,$$

  ami kibontva szintén látszik.



26. ábra. $3x - 2y - 1 = 0$

7.2. Általános pontra

A 24. feladatnál már felvetettük a kérdést, hogy mi a helyzet, ha külső pontot helyettesítünk felébe. Most válaszolunk is rá.

55. Az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ körnek legyen $P = (x_0; y_0)$ egy külső pontja. Ekkor az $xx_0 + yy_0 - 1 = 0$ felébehelyettesítéssel kapott egyenes az, amelyik átmegy a P-ből húzott két érintő érintési pontján.

Megoldás: Azt fogjuk megmutatni, hogy az érintési pontok (A és B a 26. ábrán) rajta vannak az $xx_0 + yy_0 - 1 = 0$ egyenesen.
P hatványa a körre $x_0^2 + y_0^2 - 1 = PA^2 = PB^2$. Vagyis a P középpontú $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 1}$ sugarú körön rajta kell lennie A-nak és B-nek. Ennek a körnek az egyenlete

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \left(x_0^2 + y_0^2 - 1\right) = 0.$$

Ugyanakkor A és B rajta kell legyen $x^2 + y^2 - 1 = 0$-en is. Vagyis ha kivonjuk a két egyenletet egymásból, a kapott egyenletű alakzaton (ami egy egyenes lesz) rajta lesz A és B:

$$\begin{gathered}
\left(x^2 + y^2 - 1\right) - \Big((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \left(x_0^2 + y_0^2 - 1\right)\Big) = 0 \\
x^2 + y^2 - 1 - \left(x^2 - 2xx_0 + y^2 - 2yy_0 + 1\right) = 0 \\
x^2 + y^2 - 1 - \left(x^2 - 2xx_0 + y^2 - 2yy_0 + 1\right) = 0 \\
2xx_0 + 2yy_0 + 2 = 0 \\
xx_0 + yy_0 + 1 = 0
\end{gathered}$$

És épp ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés: Ez egyébként ugyanaz az egyenes, amelyiket a P körre vett invertálásakor használjuk P' megszerkeztésére. Ez akkor is teljesül, ha egy belső pontot helyettesítünk felébe.
Mi több, ez az állítás általában is igaz. Ha egy nem elfajuló másodfokú alakzat (kör, ellipszis, parabola, hiperbola) egyenletébe felébehelyettesítünk egy tetszőleges külső pontot, a pontból húzott két

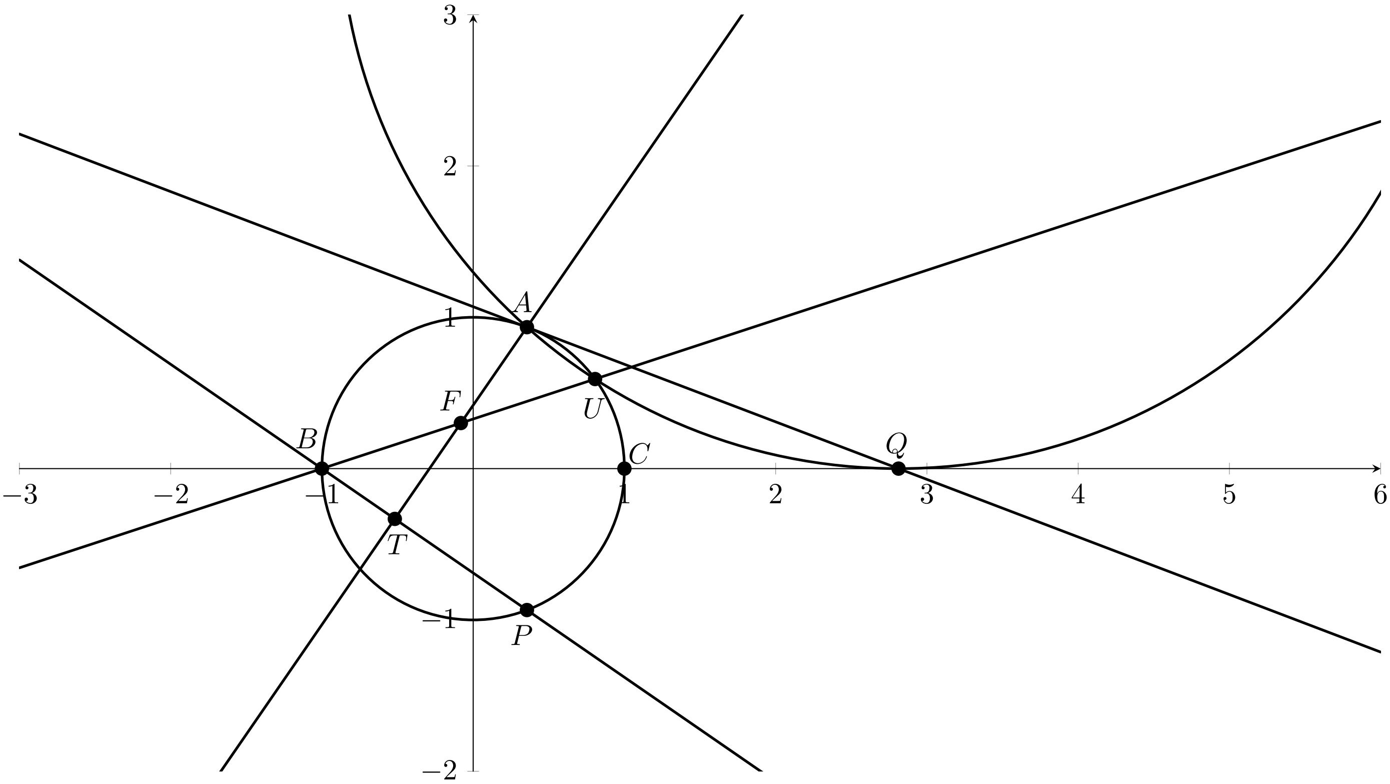
érintő érintési pontját átmenő egyenest kapunk. Belső pontból ennek látszólag nincs ennyire természetes interpretációja. Valójában azonban emögött egy egész szép témakör bújik meg, a *pólus-poláris megfeleltetés* (angolul *pole and polar*).

8. Appendix: Egy feladat az idei Arany Dani döntőről

8.1. A feladat

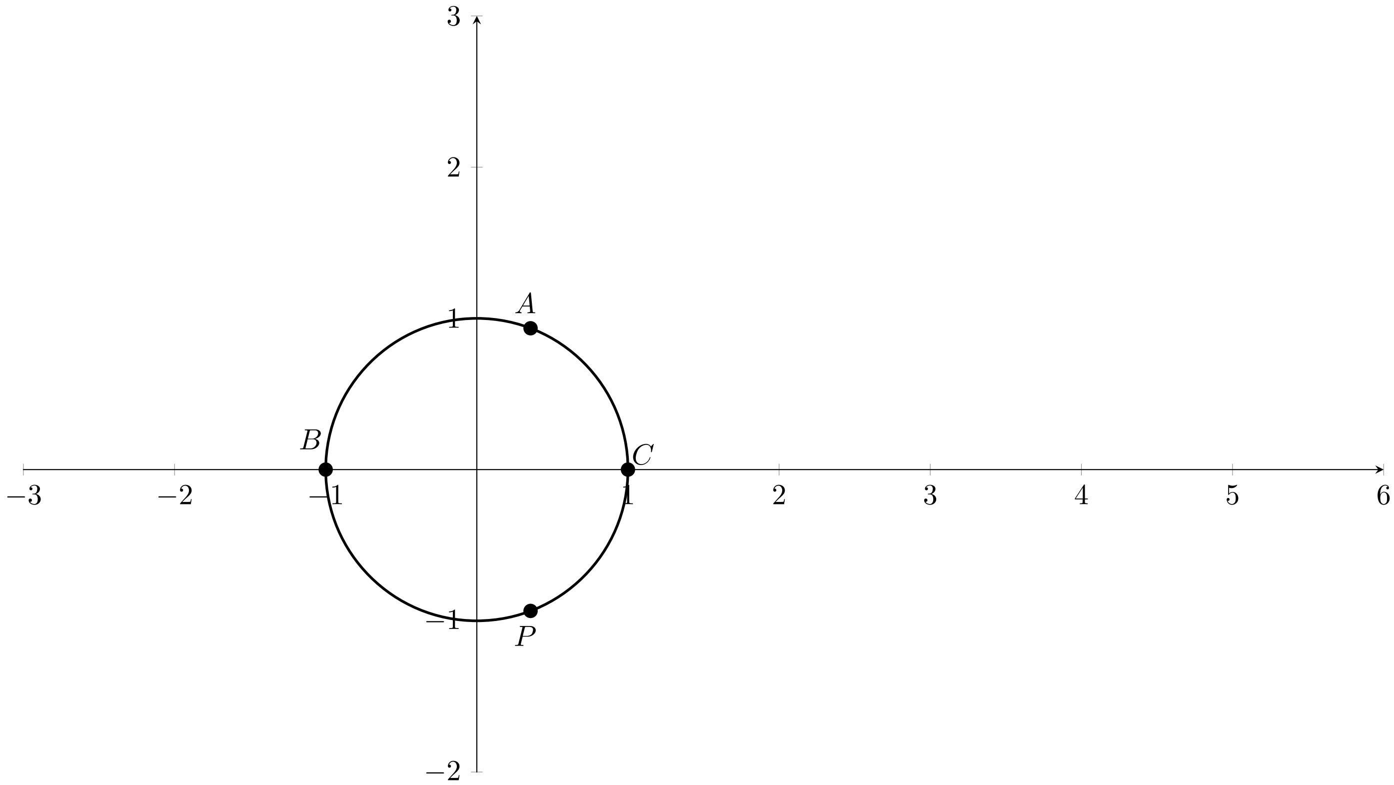
Az A-nál derékszögű ABC háromszögben $AB > AC$. Legyen az A pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe P, az A-ból BP-re állított merőleges talppontja T, míg AT szakasz felezőpontját jelölje F. Az ABC háromszög köréírt k köréhez A-ban húzott érintő a BC egyenest Q-ban metszi, míg a BF egyenes és k (B-től különböző) metszéspontja U. Igazoljuk, hogy a BQ egyenes érinti az AUQ háromszög köréírt körét!

Forrás: Arany Dániel, Haladók, III. kategória, 2023. döntő 2. feladat



8.2. Kiindulás

Az ABC derékszögű háromszög, így k körülírt körének középpontja a BC felezőpontja lesz. Ezért jó ötlet felvenni úgy a koordinátarendeszert, hogy k középpontja az origó legyen, k pedig az egységkör. Ekkor $C = -B$, ám mivel az A-t szeretnénk tükrözni majd a BC-re, célszerű úgy felvenni ezt a két pontot, hogy a tükrözést könnyű legyen számolni, vagyis pl az x-tengely, az y-tengely, vagy az $x = y$ egyenesek jó jelöltnek tűnnek. Mi most maradunk az x-tengelynél (mindjárt meglátjuk, miért), és így $B = (-1; 0)$, $C = (1; 0)$.
Legyen $A = (a; b)$, ahol $a^2 + b^2 = 1$ (ezt sokat fogjuk használni), és a feltételek miatt felthető, hogy $0 < a, b < 1$ (ezt egyáltalán nem fogjuk használni, sőt a feladat igaz akkor is, ha $-1 < a < 0$, azaz $AB < AC$).
Ekkor a tükrözés miatt $P = (a; -b)$.



Ahelyett, hogy a feladat szövegében meghatározott módon számolnánk ki a dolgokat, kezdjük inkább a másik körrel. Meghatározzuk annak a körnek az egyenletét, amely Q-ban érint a BC-t (ami az x-tengely, még szerencse, hogy így vettük fel), és átmegy az A-n. Később majd kiszámoljuk az U-t, és csak annyi lesz a dolgunk, hogy ellenőrizzük, hogy tényleg a körön van-e.

8.3. A másik kör meghatározása

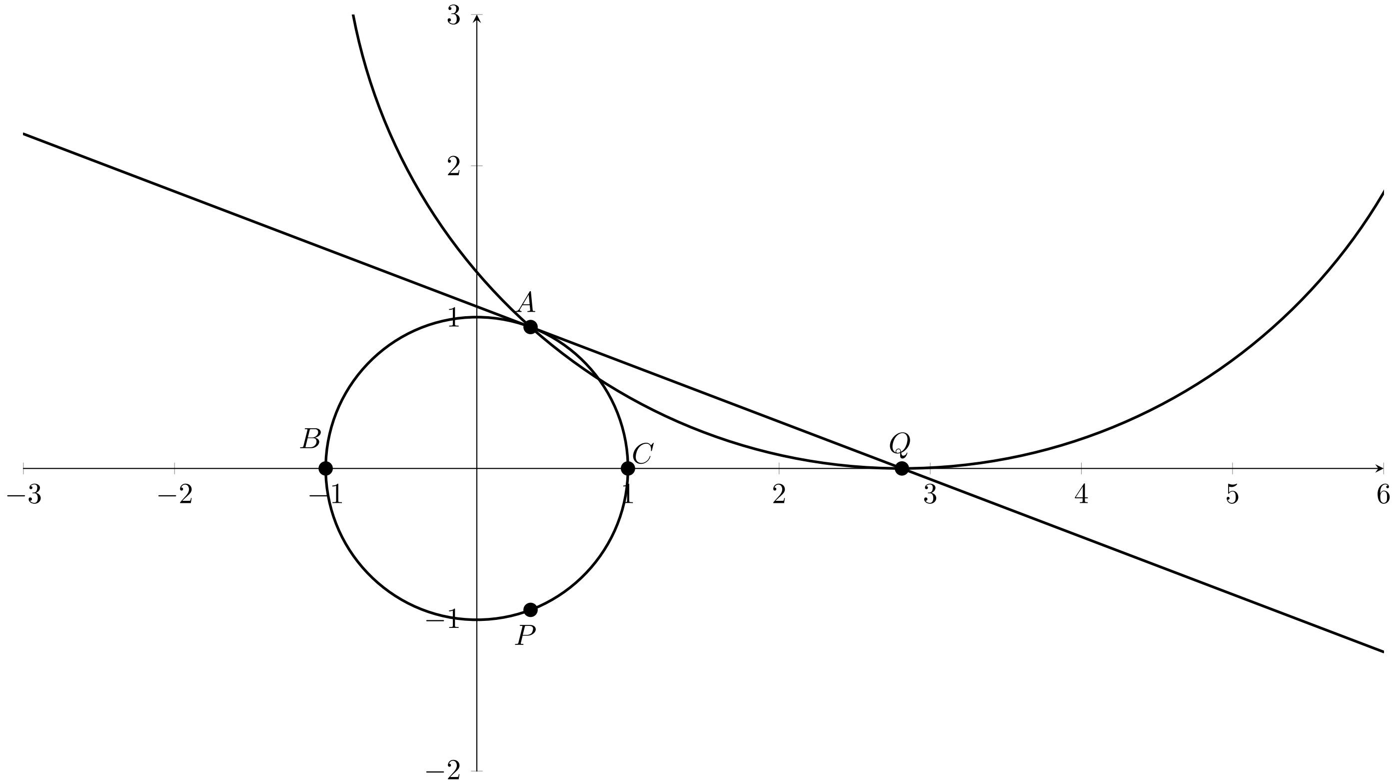
Először határozzuk meg a kör érintőjét az A-ban. Ez *felébehelyettesítéssel* könnyen kijön, hogy $ax+by = 1$.
Így tehát a Q az $ax + by = 1$ és az x-tengely ($y = 0$) metszete lesz, vagyis könnyen kapjuk, hogy $Q = \left(\frac{1}{a}; 0\right)$.
A kör egyenlete $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ típusú lesz. Mivel Q-ban érinti az x-tengelyt, ezért a középpontja a "Q felett" van, vagyis x-koordinátájuk megegyezik, tehát $u = \frac{1}{a}$. Illetve azt is tudjuk, hogy "milyen magasan van felette", hiszen épp sugárnyira, azaz $v = r$.
Tehát a körünk egyenlete valójában $\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + (y - r)^2 = r^2$ alakú. r-et pedig úgy tudjuk meghatározni, hogy kihasználjuk, hogy A-n is átmegy ez a kör, azaz $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + (b - r)^2 = r^2$ is teljesül.
Szerencsére r^2 kiesik mindkét oldalról, így r-ben csak egy elsőfokú egyenletünk lesz:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + b^2 - 2br + r^2 = r^2$$

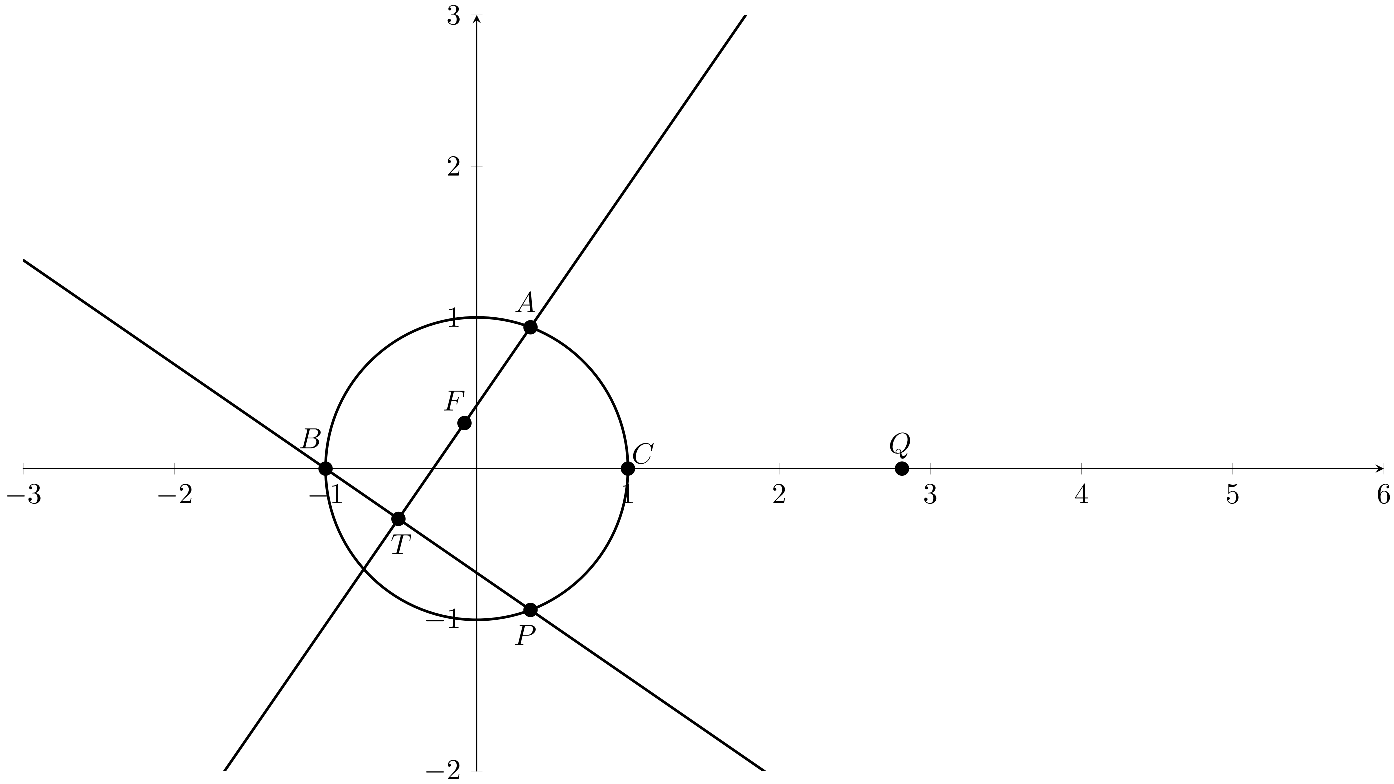
$$\frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + b^2}{2b} = r$$

Most pedig használjuk az $a^2 + b^2 = 1$ egyenletet, hogy ezt a kifejezést szebbé varázsoljuk:

$$r = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + b^2}{2b} = \frac{\left(a^2 - 1\right)^2 + a^2b^2}{2ba^2} = \frac{\left(b^2\right)^2 + a^2b^2}{2ba^2} = \frac{b^2\left(b^2 + a^2\right)}{2ba^2} = \frac{b^2}{2ba^2} = \frac{b}{2a^2}$$



8.4. T és F meghatározása



Ezek eléggé sztenderd lépések. BP egyenes egy irányvektora a B-ből P-be mutató vektor: $(1+a;-b)$, vagyis normálvektora például a $(b;1+a)$, így az egyenlete $bx+(1+a)y+K_1=0$ alakú, ahol a K_1-t könnyen megkaphatjuk abból, ha kihasználjuk, hogy átmegy a $B=(-1;0)$ ponton:

$$BP:\ b(x+1)+(1+a)(y-0)=0.$$

Az AT pedig merőleges BP-re, így neki egy normálvektora például a $(1+a;-b)$, vagyis az egyenelete $(1+a)x-by+K_2=0$ alakú lesz. Kihasználva, hogy átmegy az A ponton:

$$AT:\ (1+a)(x-a)-b(y-b)=0.$$

Ennek a két egyenesnek a metszéspontja lesz T. Adjuk össze az első egyenlet $(1+a)$-szeresét a második egyenlet $(-b)$-szeresével, így kiejtjük az x-es tagokat, tehát y-ra kapunk egy elsőfokú egyenletet:

$$(1+a)(b(x+1)+(1+a)(y-0))-b((1+a)(x-a)-b(y-b))=0$$

$$(1+a)b+(1+a)^2y+b(1+a)a+b^2y-b^3=0$$

$$(1+a)^2y+b^2y=-(1+a)b-b(1+a)a+b^3$$

$$y=\frac{-(1+a)b-b(1+a)a+b^3}{(1+a)^2+b^2}=b\frac{-(1+a)^2+b^2}{(1+a)^2+b^2}$$

Ezt tovább tudjuk alakítani, kihasználva, hogy $a^2+b^2=1$:

$$b\frac{-(1+a)^2+b^2}{(1+a)^2+b^2}=b\frac{-(1+a)^2+(1-a^2)}{(1+a)^2+(1-a^2)}=b\frac{-2a-2a^2}{2+2a}=b\frac{-2a(1+a)}{2(1+a)}=-ab.$$

Tehát T y-koordinátája $-ab$ lesz, ezt visszahelyettesítve BP-be, megkapjuk az x-koordinátáját is:

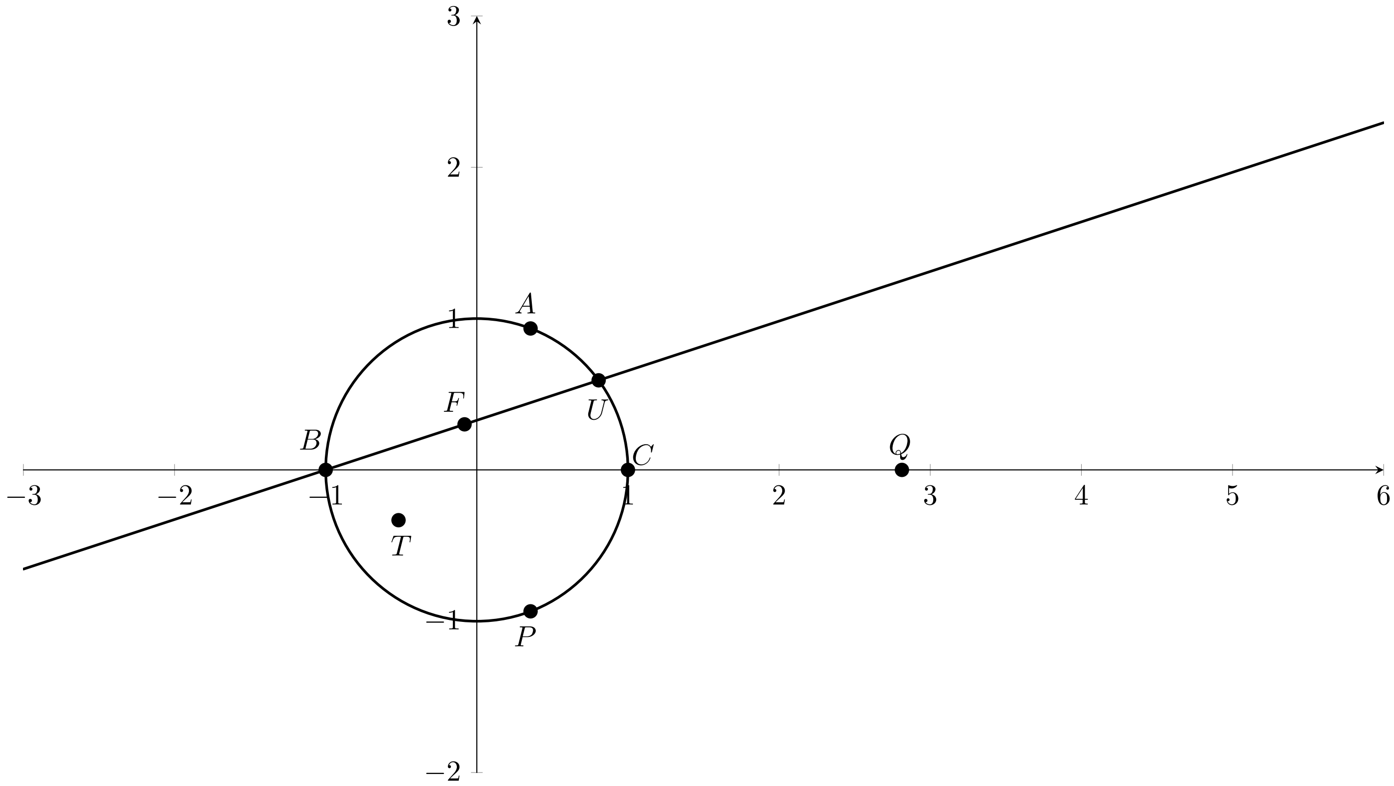
$$b(x+1)+(1+a)(-ab-0)=0$$

$$b(x+1)=(1+a)ab$$

$$x + 1 = (1 + a)a$$
$$x = (1 + a)a - 1 = a^2 + a - 1$$

Vagyis $T = (a^2 + a - 1; -ab)$.
F egyszerűen a felezőpontja AT-nek, vagyis $F = \left(\frac{a^2+a-1+a}{2}; \frac{-ab+b}{2}\right) = \left(\frac{a^2+2a-1}{2}; \frac{b(1-a)}{2}\right)$

8.5. U meghatározása



A $B = (-1; 0)$ és $F = \left(\frac{a^2+2a-1}{2}; \frac{b(1-a)}{2}\right)$ pontokon átmenő egyenesét nem nehéz meghatározni. $y = m(x+1)$ alakú lesz, ahol a meredeksége

$$m = \frac{\frac{b(1-a)}{2} - 0}{\frac{a^2+2a-1}{2} + 1} = \frac{b(1-a)}{a^2 + 2a - 1 + 2} = \frac{b(1-a)}{(1+a)^2}.$$

Ám most első körben ezt továbbra is m-nek rövidítjük, és megállapítjuk, mi lesz az $y = m(x+1)$ és az $x^2 + y^2 = 1$ második metszéspontja.
A kör egyenletébe beírva y-t:

$$x^2 + (m(x+1))^2 = 1$$
$$x^2\left(1 + m^2\right) + 2mx + \left(m^2 - 1\right) = 0$$

Ez x-re egy másodfokú egyenlet, amit meg tudnánk oldani, de ezt megspóroljuk azzal, hogy az egyik gyökét már ismerjük.
Hiszen a körön és az egyenesen is rajta lévő pontok elégítik ki mindkét egyenletet, vagyis a két metszéspont mindegyikét meg kell így kapnunk, ami azt jelenti, hogy ennek a másodfokúnak a két megoldása (x_1 és x_2) épp a két metszéspont x-koordinátája, amiből B-ét ismerjük: $x_1 = -1$.
A Viéte-formulákból tudjuk, hogy $x_1 x_2 = \frac{m^2-1}{1+m^2}$, vagyis $x_2 = \frac{1-m^2}{1+m^2}$. Ezt behelyettesítve $y = m(x+1)$-be: $y_2 = m\left(\frac{1-m^2}{1+m^2} + 1\right) = m\frac{1-m^2+1+m^2}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$.
A számolást megkönnyítendő, először határozzuk meg m^2-et:

$$m^2 = \left(\frac{b\left(1-a\right)}{\left(1+a\right)^2}\right)^2 = \frac{b^2\left(1-a\right)^2}{\left(1+a\right)^4} = \frac{\left(1-a^2\right)\left(1-a\right)^2}{\left(1+a\right)^4} = \frac{\left(1-a\right)^3}{\left(1+a\right)^3}$$

Tehát

$$U = \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}; \frac{2m}{1+m^2}\right) = \left(\frac{1-\frac{(1-a)^3}{(1+a)^3}}{1+\frac{(1-a)^3}{(1+a)^3}}; \frac{2\frac{b(1-a)}{(1+a)^2}}{1+\frac{(1-a)^3}{(1+a)^3}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\left(1+a\right)^3-\left(1-a\right)^3}{\left(1+a\right)^3+\left(1-a\right)^3}; \frac{2b\left(1-a\right)\left(1+a\right)}{\left(1+a\right)^3+\left(1-a\right)^3}\right) =$$

$$= \left(\frac{2\left(3a+a^3\right)}{2\left(1+3a^2\right)}; \frac{2b\left(1-a^2\right)}{2\left(1+3a^2\right)}\right) =$$

$$= \left(\frac{3a+a^3}{1+3a^2}; \frac{b\left(1-a^2\right)}{1+3a^2}\right)$$

8.6. Befejezés

És akkor már tényleg csak annyit kell ellenőrizni, hogy $U = \left(\frac{3a+a^3}{1+3a^2}; \frac{b\left(1-a^2\right)}{1+3a^2}\right)$ vajon rajta van-e $\left(x-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(y-\frac{b}{2a^2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a^2}\right)^2$ körön. Vagyis, hogy ez igaz-e:

$$\left(\frac{3a+a^3}{1+3a^2} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\left(1-a^2\right)}{1+3a^2} - \frac{b}{2a^2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a^2}\right)^2$$

Nincs menekvés, ennek neki kell állni számolni. Szorozzunk fel $\left(2a^2\left(1+3a^2\right)\right)^2$-nel:

$$\left(2a^2\left(3a+a^3\right) - 2a\left(1+3a^2\right)\right)^2 + \left(2a^2b\left(1-a^2\right) - b\left(1+3a^2\right)\right)^2 = \left(b\left(1+3a^2\right)\right)^2$$

$$4a^2\left(3a^2+a^4-1-3a^2\right)^2 + b^2\left(\left(2a^2\left(1-a^2\right) - \left(1+3a^2\right)\right)^2 - \left(\left(1+3a^2\right)\right)^2\right) = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 + b^2\left(4a^4\left(1-a^2\right)^2 - 4a^2\left(1-a^2\right)\left(1+3a^2\right)\right) = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 + 4a^2\left(1-a^2\right)b^2\left(\left(1-a^2\right)a^2 - \left(1+3a^2\right)\right) = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 + 4a^2\left(1-a^2\right)b^2\left(a^2-a^4-1-3a^2\right) = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 + 4a^2\left(1-a^2\right)b^2\left(-a^4-1-2a^2\right) = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 - 4a^2\left(1-a^2\right)b^2\left(1+a^2\right)^2 = 0$$

Beírva $b^2 = 1-a^2$-et:

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 - 4a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)^2 = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 - 4a^2\left(1-a^2\right)^2\left(1+a^2\right)^2 = 0$$

$$4a^2\left(a^4-1\right)^2 - 4a^2\left(1-a^4\right)^2 = 0$$

És ez tényleg teljesül.

9. Appendix: Droz-Farny

9.1. A tétel

Legyen az ABC háromszög magasságpontja M. Vegyünk fel M-en át két egymásra merőleges egyenest: ℓ_1, ℓ_2. Legyen ℓ_i metszéspontja AB-vel C_i, BC-vel A_i, CA-val B_i. Legyen F_A az A_1A_2 felezőpontja, F_B a B_1B_2 felezőpontja, F_C a C_1C_2 felezőpontja. Ekkor az F_A, F_B, F_C pontok egy egyenesre esnek.

10. Appendix: Gyakorlófeladatok

10.1. Egyenesek és körök gyakorlófeladatok

Ez egy elég jó gyűjtemény: http://uj.porki.hu/sajat/matek/fgy/G11webFGYkoordgeo07.pdf

10.2. Kicsit trükkösebb feladatok

56. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $2x - y = -4$, $3x + y = 11$. Szimmetriaközéppontja a $(2;1)$ pont. Számítsuk ki a csúcspontok koordinátáit!

57. A háromszög egyik csúcspontja az $A(1;2)$ pont, két magasságvonalának egyenlete $2x - 3y + 1 = 0$ és $x + y = 0$. Számítsuk ki a hiányzó csúcspontok koordinátáit!

58. Melyek azok a pontok az $3x + y = 11$, ahonna az $(x - 10)^2 + (y - 7)^2 = 50$ körhöz húzott két érintő merőleges egymásra?

59. Melyek azok a pontok az $4x + 3y = 19$ egyenesen, ahonnan az $(x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 40$ körhöz húzott két érintő 60°-os szöget zár be? *(A kör az egyik* 60°*-os szögtartományba esik, nem a* 120°*-osba.)*

60. Egy háromszög csúcsai $K(-1;5)$, $L(1;1)$, $M(5;3)$.
a) Igazold, hogy a háromszög L-nél lévő szöge derékszög!
b) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

10.3. Emelt szintű érettségi feladatok

61. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2;0)$, $Q(6;0)$ és $R(0;5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.
a) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1,8;0)$.
b) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

62. Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6;0)$, $B(6;0)$ és$C(0;8)$. Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög kerületét és területét is!

63. Adott a k kör, amelynek középpontja a $K(-5;7)$ pont, és a sugara 10 egység. Ezen a körön belül adott az $A(-4;14)$ pont.
a) Írja fel annak az A ponton áthaladó e egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a KA szakaszra!
b) Határozza meg a k kör e egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

64. Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.
a) Igazolja, hogy az $E(-7;5)$ pont rajta van a k körön!
b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét!
c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja!

65. Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzoló- program segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0;0)$, $B(30;0)$, $C(30;48)$, $D(0;48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.
a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét!
A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2 + y^2 - 36x - 48y + 819 = 0$ alakban adta meg.
b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének!
A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18;24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.
c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

66. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16;10), B(2;4), C(10;2)$.
a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét!
A K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től.
b) Határozza meg a K pont koordinátáit!

67. Egy $ABCD$ négyzet A csúcsa a koordinátarendszer y tengelyére, szomszédos B csúcsa pedig a koordinátarendszer x tengelyére illeszkedik.
a) Bizonyítsa be, hogy a négyzet K középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentett-jei!
b) Egy ilyen négyzet középpontja a $(7;7)$ pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsa ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit!

68. Az $ABCD$ húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x - y = 4$. A trapéz AB alapjának egy belső pontja $P(-5;1)$, BC szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit!