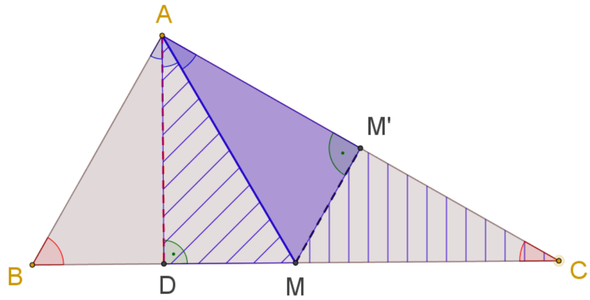
Marczis György: Ugye, szép a geometria?
Feladatok

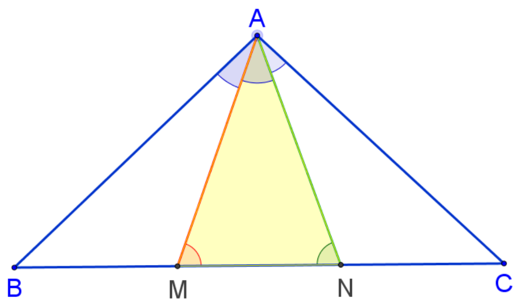
1. *feladat: Igazoljuk, hogy egy olyan szimmetrikus trapéz területe, amelynek átlói egymásra merőlegesek, egyenlő egy olyan négyzet területével, amelynek oldala akkora, mint a trapéz magassága!*

2. *feladat: Az **ABCΔ**-ben **AD** magasságvonal és **AM** súlyvonal az ábra szerint. Számítsuk ki az **ABCΔ** szögeit, ha a **BAD∠**, **DAM∠** és **MAC∠** -ek egyenlők (a **BC** szakaszon a pontok elhelyezkedési sorrendje: **B**, **D**, **M**, **C**)!*

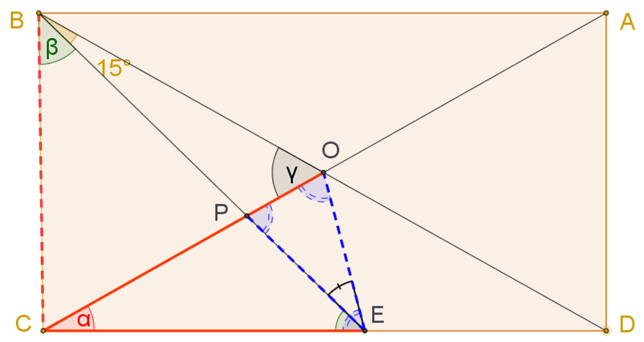


3. *feladat: Az **ABC** hegyesszögű **Δ** –ben az **A** csúcsnál levő szög **60º**-os, amelynek szögfelezője **AA'** (**A'** ∈ **BC**). Az **A'** pontból húzzuk meg az **AB** oldalra merőleges **A'M** szakaszt (**M** ∈ **AB**), majd az **M** pontból az **AA'**-re merőleges **MN** szakaszt (**N** ∈ **AA'**)! Igazoljuk, hogy **3·A'M = AA' + 2·A'N**!*

4. *feladat: Az **ABCΔ** egyenlő szárú (**AB = AC**). Az **A** csúcsnál lévő szögét a **BC** oldal **M** és **N** pontjai által meghatározott **AM** és **AN** szakaszokkal az ábra szerint három részre osztjuk úgy, hogy a **BAM∠**, az **MAN∠** és az **NAC∠** egyenlő legyen (harmadoljuk a **BAC∠** -et). Lehetséges-e, hogy a **BC** oldalon keletkezett **BM**, **MN** és **NC** szakaszok egyenlők legyenek: **BM = MN = NC**?*

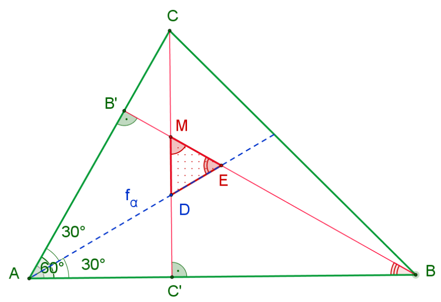


5. *feladat: Az **ABCD** téglalap (**AB>BC**) **B** csúcsából húzott szögfelező és a **B** csúcsból induló átló **15º**-os szöget zár be az ábra szerint. A **B** csúcsból húzott szögfelező az **AC** átlót **P**-ben, a **CD** oldalt **E** pontban metszi. Jelöljük **O**-val az **ABCD** téglalap átlóinak metszéspontját! Igazoljuk, hogy a **COEΔ** és **OEPΔ** egyenlő szárú!*



6. *feladat: Legyen **ABC** háromszög **AB** oldalának **M** egy tetszőlegesen mozgó belső pontja! **B**-ből **CM** egyenessel húzott párhuzamos egyenes az **AC** egyenest az **N** pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az **AMN** háromszög területe nem változik, ha az **M** pont mozog az **AB** szakaszon!*

7. *feladat: Az **ABC** hegyesszögű háromszögben **CAB∠ = 60º**. A **BB'** és **CC'** magasságvonalak egymást **M**-ben, míg a **CAB∠** szögfelezőjét (f_α) a **D** és az **E** pontokban metszik az ábra szerinti elrendezésben. Igazoljuk, hogy az **MDEΔ** szabályos!*



8. *feladat: Igazoljuk, hogy egy **ABCD** konvex négyszögben az átlók négyzetösszegének és összegének aránya kisebb, mint a négyszög kerületének a fele!*

9. *feladat: Igazoljuk, hogy bármely konvex sokszögnek nem lehet háromnál több hegyesszöge!*

10. *feladat: Legyen az **ABCΔ** -nek a **BC**, **CA** és **AB** oldalán egy-egy tetszőleges* $\boldsymbol{A_1} \in \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{B_1} \in \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{C_1} \in \boldsymbol{AB}$ *belső pont! Jelöljük az AA_1 szakaszt I_a -val, BB_1 szakaszt I_b -vel és CC_1 szakaszt I_c -vel! Igazoljuk, hogy:*

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$