Sorozatok? Deriválás? Integrál?

Mivel kezdjük az analízist? Vagy a kalkulust?

Hujter Bálint

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk. és Gimn.

2019. július 4.

Analízis Magyarországon szokásos felépítése

0. Valós számok és valós függvények értelmezése.
1. Sorozatok határtéke.
2. Függvények határértéke, folytonossága.
3. Differenciálszámítás.
4. Integrálszámítás (Riemann–integrál)

Valahol közben vagy előtte

- Végtelen sorok.

Csak egyetemen:

- Függvénysorok
- Differenciálegyenletek

Ez NEM a történeti sorrendje a témakörök feltalálásának!

Miért jó ez a felépítés?

A fogalmak, definíciók, tételek és bizonyítások így épülnek egymásra, fokozatosan nehezednek.
Példák az egymásra épülésre:

- a differenciálhányados definíciója a függvényhatárérték segítségével van kimondva
- a Riemann-integrál definíciói a sorozatok határértékét használják
- a folytonosság a integrálhatóságnak legfontosabb/legtipikusabb elégséges feltétele;
  a differenciálhatóságnak fontos szükséges feltétele.

Hasonlat: Házépítés téglákból

Hiányérzetem okai

Majd példákkal kifejtem

- **Tételek:** nem világos, hogy miről szólnak igazából?
- **Definíciók:** bonyolultak, technikaiak és nem világos, hogy miért pont azt és úgy érdemes definiálni.
- **Problémaközpontúság hiánya** A sorozatok, függvények határértékének tanulásakor még nem látjuk, hogy miért is fontos ez az egész, miért nem csak egy öncélú játék a fogalmakkal?
  - **Általános vs speciális**

Ez mind kapcsolódik ahhoz, hogy a mai felépítés sorrendje nagyon eltér a történeti felfedezési sorrendtől.

Rövid történeti áttekintés

- Eudoxosz (i.e. IV. sz.), Arkhimédész (i.e. III. sz.) – kimerítés
- **infinitezimális** számítások XVI. századtól
  (Cavalieri, Fermat, Wallis, Barrow, ...)
- Newton és Leibniz 1680 k.
- XIX. sz. Bolzano, Cauchy, Weierstrass

A történet több szálon fut:

- a szám és a függvény fogalma is folyamatosan alakul
  (Cantor, Dedekind, Dirichlet)
- a végtelen összegek elmélete belefonódik
- erős geometriai és fizikai kapcsolódások

Newton–Leibniz-tétel

Tétel (Newton–Leibniz – egyszerű esetben)

Az F és f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy $F' = f$. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Mi a tétje a bizonyításnak?

Ha sikerült bebizonyítanunk, akkor minek is örülünk igazából?

Newton–Leibniz-tétel

Tétel (Newton–Leibniz – egyszerű esetben)

Az F és f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy $F' = f$. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Mi a tétje a bizonyításnak?

Ha sikerült bebizonyítanunk, akkor minek is örülünk igazából?
Ettől lett meg a bizonyosságunk a tétel igaz voltában?

- *Szerintem a N-L tétel sokkal alapvetőbben igaz, mint azok az eszközök, amiknek segítségével bebizonyítottuk, sőt akár ki is mondtuk.*
- *Így én inkább annak örülök, hogy a definícióink (deriválás, integrálás...) ezek szerint jól működnek, kijön belőlük az, amit reméltünk/elvártunk tőlük.*

Folytonosság definíciója

Definíció

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos** ha minden u valós számra teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$ pozitív szám, hogy ha $|x - u| < \delta$ teljesül, akkor $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

- Miért kell ilyen bonyolult definíció? (Miért lokális?)
  Cauchy: *az x végtelenül kicsi megváltoztatása végtelenül kicsi változást eredményez $f(x)$-ben*
- Mi köze van az intuitív folytonosság-képhez?
  Egy intuitív def.: *A grafikon bármely két pontjára teljesül, hogy minden őket elválasztó vonalat metsz a függvénygrafikon.*
- Sokkal jobban értem, hogy miért ezt kell megfogni, ha már látom a differenciálhatósággal és az integrálhatósággal való kapcsolatát.

Folytonosság, deriválás és integrálhatóság kapcsolatáról

Máshogy is lehet integrálni és deriválni, és ezekhez más folytonosság-fogalom társulhat!

Pl.:

- Lebesgue-integrál
- Radon–Nikodym-derivált
- abszolút folytonosság

Láncszabály

Melyik mond többet?

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{vagy} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Szinusz deriválása

Tankönyvi bizonyítás

Bizonyítás. (i) Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$-re és $x \neq a$-ra

$$\frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{2 \sin (x-a)/2 \cdot \cos (x+a)/2}{x-a} = \frac{\sin (x-a)/2}{(x-a)/2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}$$

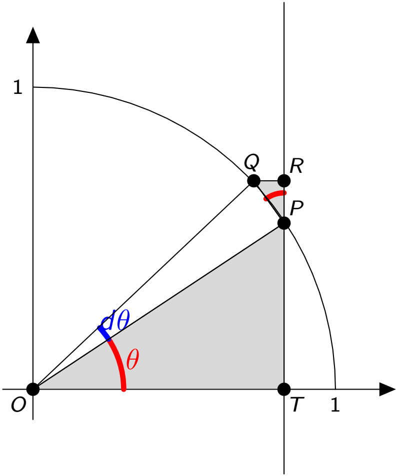
(10.37) második azonossága alapján. Mivel $\lim_{x \to a} \sin \big((x-a)/2\big) \big/ \big((x-a)/2\big) = 1$ és $\lim_{x \to a} \cos (x+a)/2 = \cos a$ a (10.45) összefüggés, a cos függvény folytonossága és az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel szerint, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a.$$

Forrás: Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Valós analízis I., 251. oldal

Szinusz deriválása

XVII. századi, geometriai módon



- $\sin(\theta + d\theta) - \sin(\theta) = PR$
- $d\theta \approx QP$
- PRQ és OTP háromszögek (durván) hasonlók, tehát
- $\dfrac{PR}{QP} \approx \dfrac{OT}{OP} = \cos(\theta)$
- amiből $\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) = \cos(\theta)$

e definíciója

Az $(1 + (1/n))^n$ sorozat határérértékét e-vel jelöljük[1], tehát

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.3}$$

Mint a későbbiek során látni fogjuk, ez a konstans az analízisben és a matematika más fejezeteiben jelentős szerepet játszik.

alternatív: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$

Miért fontos? Miért érdekes?

Nekem az e sokkal inkább ezekről szól:

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $f' = f$ alapmegoldása e^x

Ötlet egy más sorrendre

Előzményként legyen valami (de nem túl sok)

- a valós számokról és függvényekről
- a végtelen összegekről

Fő rész:

1. **Kalkulus** (intuitíven, precíz bizonyítások és definíciók nélkül)
2. **Analízis** (precíz definíciók és bizonyítások)
   (a) előbb a központi definícókat és viszonyrendszerüket lássuk át
   (b) utána köré építünk annyit, amennyit időnk enged
   (pl. tételek alapos bizonyítása, konkrét határértékek precíz kiszámítása, egyéb definíciók pl. féloldali határérték vagy improprius integrál)

Arkhimédész és a kimerítés módszere

Kiindulás: Laczkovich–T. Sós könyv elején *Rövid történeti bevezetés*

Arkhimédesz nyomán:

- Kör területe ($\frac{rK}{2}$)
- Parabolaszelet területe (x^2 alatti terület $[0, 1]$ felett $\frac{1}{3}$)

A diákok próbáljanak adni ezekre indoklásokat
(különböző precízségi szinteken).

jöhet még: Térfogatszámítási feladatok és Cavalieri-elv

Motiváló gyakorlati problémák

XVI–XVII. századi kérdések

- Határozzuk meg a szabadon eső test sebességét és gyorsulását.
- Írjuk le az elhajított test pályáját. Állapítsuk meg, hogy a test milyen magasra repül és hol esik le.
- Egyéb fizikai folyamatok leírása, pl. egy kihűlő test hőmérsékletének meghatározása. Ha ismerjük a hőmérsékletet két adott időpontban, ki tudjuk-e ebből számítani minden más időpontban?
- Érintőszerkesztési feladatok. Hogyan kell a parabola érintőjét megszerkeszteni egy adott pontban?
- Mi a felfüggesztett lánc alakja?
- Szélsőérték-problémák. Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú henger? Két adott pont között melyik az időben legrövidebb út, ha a sebesség a hely függvényében változik? (Az utóbbi kérdést a fénytörés vizsgálata motiválta.)
- Egyenletek közelítő megoldása.
- Hatványok (pl. $2^{\sqrt{3}}$) és a trigonometrikus függvények értékeinek (pl. $\sin 1^\circ$) közelítő kiszámítása.

Forrás: Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Valós analízis I., 15. oldal

Newton és Leibniz válasza

A Newton/Leibniz féle kalkulus ezekre ad választ, méghozzá úgy, hogy az alábbi két alapproblémára vezeti vissza a többi kérdést:

- Érintő meredekségének (avagy a változás sebességének mérése)
- Görbe alatti terület kiszámítása.

Ezekre pedig ad **hatékony számítási módszer**t.

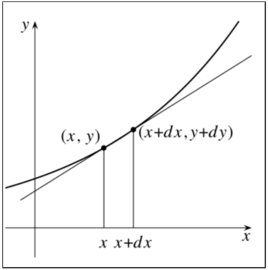
Kicsit később meg lehet mutatni, pl. hogy görbék ívhossza hogyan játszható vissza egy másik görbe alatti területté a $\int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ *segítségével*

Differenciálás

y az x függvénye, pl. $y = x^2$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx} = 2x$$

mivel $(dx)^2$ elhanyagolható!

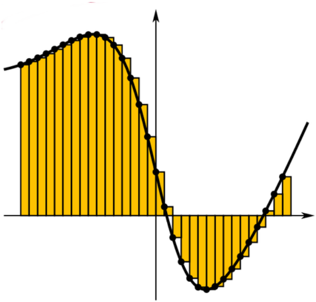


Megjegyzések:

- Szemléletes kép: egyenes vonalon mozgó test pillanatnyi sebessége
- **Problémás:** most akkor a dx nulla vagy nem nulla?
- Anakronizmus:a XVII. században nem így gondoltak a függvényre, sokkal inkább: x és y is egy idő (t) függvényében változó mennyiség.

Görbe alatti terület.

Végtelen sok *infinitezimálisan* keskeny téglalap területének összege.



Sebesség-idő grafikon: görbe alatti terület = megtett út.
Ha ezt „megértjük", akkor a Newton–Leibniz-tétel már „kipotyog".

Kalkulus

Egyszerű deriválni: polinom, gyök, törtfüggvények, trigonometrikus fv-ek

Deriválás szabályok: könnyen átláthatók, pl. szorzatfüggvény

$$\frac{d(y \cdot z)}{dx} = \frac{(y + dy)(z + dz) - yz}{dx} \approx \frac{y \cdot dz + z \cdot dy}{dx} = y \cdot \frac{dz}{dx} + z \cdot \frac{dy}{dx}$$

(Nem precíz bizonyítás! De könnyen érthető érvelés!)
Hasonlóan: hányados, láncszabály, inverzfüggvény

Elhalasztanám: exponenciális és logaritmus
(nem is világos, hogy értelmeztük-e már ezeket?)

Léteznek-e infinitezimálisok?

Kérdés

Van-e olyan szám, amely a 0-nál nagyobb,
de kisebb minden pozitív számnál?

Kb. ekvivalens:

- Van-e az $\frac{1}{n}$ sorozatnak végtelenedik tagja, $\frac{1}{\infty}$?
- Szám-e a ∞ és lehet-e vele műveleteket végezni?

Érdemes megvitatni a gyerekekekkel! $\rightarrow$ **Arkhimédeszi axióma**

Történeti megjegyzések:

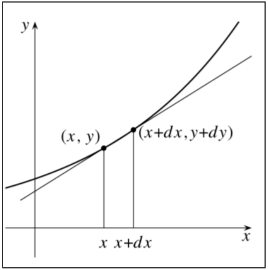
- Leibniz maga is gondolkodik az infinitezimálisok létéről, jelentéséről (be is vall hiényosságokat, de biztos benne, hogy precízzé tehető)
- Euler hisz az infinitezimálisan kicsi és nagy (jelölése: ω és i) számok létezésében és használja is ezeket érvelésekben.

A fő definíciók kialakítása

Ha már tudjuk, mi a cél, nekiállhatunk együtt kitalálni a definíciókat a gyerekekkel!

Lehet, hogy a differenciálhányados felől érdemes kezdeni:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Ez akkor is jelent valamit (geometriailag is!), ha még nem tudom a lim definícióját.

Majd ezt általánosítva lesz függvény-határérték.

A fő definíciók kialakítása

1. ??? Végtelen sorok $\rightarrow$ Sorozat határérték ???
2. Differenciálhányados $\rightarrow$ Függvényhatárérték
3. Riemann-Integrál $\rightarrow$ Folytonosság (Egyenletes folytonosság)

Majd ezek közötti kapcsolatok feltérképezése.

Végtelen sorok és sorozat határétéke

- Végtelen összegekkel természetes módon találkoznak a gyerekek
- Magától értetődőbb és izgalmasabb kérdés, mint a sorozat határértéke
- Gond: az érdekesebb sorokat nehéz kiszámolni, pl.

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots &= \ln(2) \\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots &= \frac{\pi}{4} \\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Bár ez felfogható motivációnak a későbbiekre nézve.

Torzszülött függvények

A függvényfogalmunkba sok minden belefér.

- Semmilyen intervallumon nem korlátos függvény
- Dirichlet-függvény, Riemann-függvény
- $\sin(1/x), x\sin(1/x)$
- ...

Ezek a háttérből erősen befolyásolják majd a definícióinkat.

Határozott integrál definíciója

Miért nem jó például a következő definíció?

Definíció (Hibás (?) definíció az integrálra)

Vegyük az $[a, b]$ intervallum n egyenlő részre osztását, a felosztásban szakaszok középpontja legyen $x_1, \ldots, x_n$.
Az integrál értéke legyen a következő határérték:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{b-a}{n}$$

Folytonos függvényre ez is működik.
(És valójában elég ritkán akarunk nem-folytonos függvényeket integrálni...)

Alternatív definíciók a folytonosságra

Vajon ekvivalensek a hivatalos definícióval?

Definíció (Alternatív saját definíció a folytonosságra – 1)

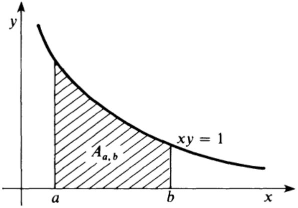
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, ha bárhogyan is választunk ki $a < b$ számokat, van hozzájuk egy K szám, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $|f(x) - f(a)| < K(x - a)$ és $|f(x) - f(b)| < K(b - x)$.

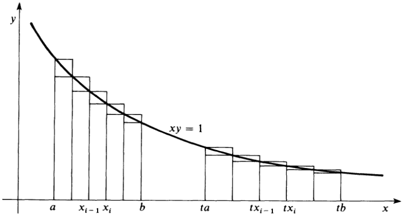
Definíció (Alternatív saját definíció a folytonosságra – 2)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz tudok rajzolni egy olyan (véges sokszor törő) töröttvonalat, hogy f grafikonjának minden pontja legfeljebb ε távolságra legyen a töröttvonaltól.

Az e definíciója – Napier nyomán

Legyen: $A_{a,b} = \int_a^b \frac{1}{x}$

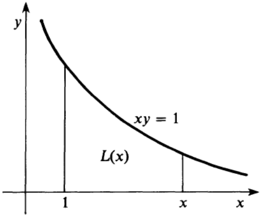


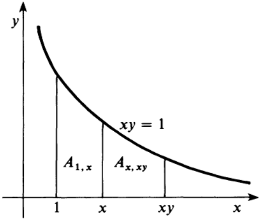


Észrevétel: $A_{ta,tb} = A_{a,b}$

Az e definíciója – Napier nyomán

Legyen
$L(x) = A_{1,x}$





Ekkor

$$L(xy) = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y} = L(x) + L(y)$$

tehát ez egy logaritmusfüggvény.

Összefoglalás, további kérdések

Fő gondolat:
előbb érzékeltessük, hogy mit is akarunk majd „megfogni” a definícióinkkal.

Hogyan működik ez a gyakorlatban?
→ Tervem szerint követhető lesz itt: `specmat.wiki`

Fontos lenne még beszélni róla:

- **függvényfogalom**
- **valós számok**

Mikor, hogyan, mennyit mondjunk ezekről?

Hivatkozások

- Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Valós analízis I–II.
  © *Typotex, 2012*
- C.H. Edwards: The historical development of the Calculus
  © *Springer-Verlag New York, Inc., 1979*

Köszönöm a figyelmet!