Komplex számokkal elegánsabb?

Kiss Géza

RLV, 2018. július 4.

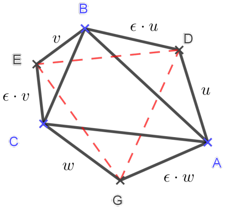
Miről is lesz szó?

- I. Vektorok - geometriai transzformációk,
- II. Körök és húrjaik,
- III. Köri pontnégyes - kettős viszony,
- IV. Trigonometriai alkalmazások,
- V. Néhány tétel bizonyítása,
- VI. Versenyfeladat megoldása komplex számokkal,
- VII. További lehetőségek.

Feladat

Egy háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltunk. Igazoljuk, hogy a szabályos háromszögek középpontjai ismét szabályos háromszöget határoznak meg.

1. („vektoros") megoldás:



Be kell látni, hogy

$$(\varepsilon \cdot v + w) \cdot \varepsilon = -v - \varepsilon \cdot u.$$

Ehhez felhasználjuk a következőket:

Egyrészt a hat komplex szám (vektor) összege nulla:

$$u + \varepsilon u + v + \varepsilon v + w + \varepsilon w = 0,$$

$$(1 + \varepsilon)(u + v + w) = 0,$$

$$u + v + w = 0.$$

Másrészt, mivel ε hatodik egységgyök $\varepsilon^3 = -1$, vagyis

$$\varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1) = 0,$$

Az $\varepsilon + 1$ nem nulla, tehát $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ illetve $\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon$.
A bizonyítandó egyenlőséget egy oldalra rendezve valóban látjuk, hogy

$$(\varepsilon^2 + 1)v + \varepsilon u + \varepsilon w = \varepsilon(u + v + w) = 0.$$

Most kiszámoljuk először a D, E és G pontokhoz tartozó komplex számokat. A $d - a$ komplex szám pozitív irányú 60°-os elforgatottja éppen $b - d$. Ezt az ε segítségével fel tudjuk írni: $\varepsilon(d - a) = b - d$. Ebből d, e és g kifejezhetők:

$$d = \frac{b + \varepsilon a}{\varepsilon + 1},\ e = \frac{c + \varepsilon b}{\varepsilon + 1},\ g = \frac{a + \varepsilon c}{\varepsilon + 1}.$$

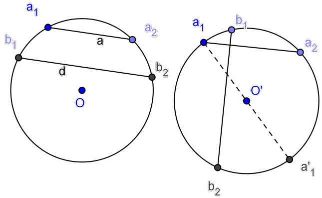
A DEG háromszög szabályos, ha a D pont G körüli 60°-os elforgatottja éppen az E pont, azaz $\varepsilon(d - g) = e - g$.

$$\varepsilon(d - g) = \frac{\varepsilon b + \varepsilon^2 a - \varepsilon a - \varepsilon^2 c}{\varepsilon + 1} = \frac{\varepsilon b + c - a - \varepsilon c}{\varepsilon + 1} = e - g.$$

Ezzel a módszerrel sok esetben lehet dolgozni. Pl. Newton-tétel, különféle Ceva-típusú kérdések, oldalakra rajzolt háromszögek, négyzetek, szabályos sokszögek kérdései, Mackósajt-probléma.

Feladat

Az O középpontú kör két húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2 illetve b_1, b_2. Mi a párhuzamosságuk feltétele?



Az $(a_1 b_1)$ ív egyenlő az $(a_2 b_2)$ ívvel, tehát a_1-et ugyanaz az O középpontú forgatás viszi b_1-be, amely b_2-t a_2-be. A két komplex szám hányadosa ugyanaz az egységnyi hosszúságú komplex szám kell, hogy legyen.

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 a_2 = b_1 b_2.$$

További fontos segédeszközök:

Bizonyítható

Az O középpontú kör két húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2 illetve b_1, b_2. A merőlegességük feltétele: $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Bizonyítható

Az O középpontú kör két húrjának végpontjai legyenek a_1, a_2 illetve b_1, b_2. Metszéspontjuk:

$$m = \frac{a_1 a_2 (b_1 + b_2) - b_1 b_2 (a_1 + a_2)}{a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$

Ha a húrok merőlegesek, akkor ebből (is):

$$m = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}.$$

Feladat

Igazoljuk, hogy a háromszög talpponti háromszögének oldalai merőlegesek a háromszög köré írt kör csúcsokhoz tartozó sugaraira.

Legyen a háromszög köréírt körének középpontja ismét az O pont, a csúcsok a, b és c. A három helyvektor összege a magasságpontba mutat, tehát

$$m = a + b + c.$$

A magasságpont oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak. Két ilyen pontot összekötő szakasz párhuzamos a talpponti háromszög oldalával. Belátjuk, hogy az a és b csúcsokhoz tartozó magasságoknak a körrel vett metszéspontjait összekötő húr merőleges a c és $-c$ pontokat összekötő átmérőre:

$$-\frac{bc}{a} \cdot -\frac{ac}{b} + c(-c) = c^2 - c^2 = 0.$$

Feladat

Forgassuk el az ABCD húrnégyszöget a középpontja körül. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti négyszög oldalegyenesei az elforgatott négyszög megfelelő oldalait egy paralelogramma csúcsaiban metszik.

Legyen a forgatást generáló egység-komplex szám ε. Ekkor pl. a és b elforgatottja $a' = \varepsilon a$, illetve $B' = \varepsilon b$. A két húr metszéspontja:

$$x = \frac{ab(a' + b') - a'b'(a + b)}{ab - a'b'} = \frac{ab\varepsilon(a + b) - ab\varepsilon^2(a + b)}{ab(1 - \varepsilon^2)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(a + b) = t(a + b).$$

Rendre kapjuk, hogy $x = t(a + b), y = t(b + c), z = t(c + d)$ és $u = t(d + a)$. Ebből $x - y = u - z$, a négyszög paralelogramma.

- Síkbeli egyeneshalmaz talpponti alakzata és metszéspontalakzata,
- Simson-egyenes,
- Adott körbe írt két egybevágó,azonos körüljárású háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai az eredetihez hasonló háromszöget határoznak meg,
- Ennek a háromszögnek a magasságpontja a kör középpontja,
- Brocard-féle pontok.

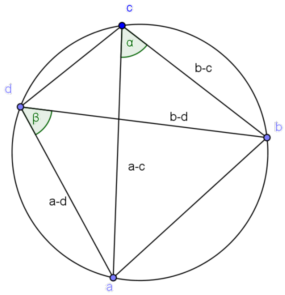
$(acb)\angle = (adb)\angle$, ezért $b - c$ vektort ugyanolyan szögű forgatás viszi $(a - c)$-vel párhuzamos helyzetbe, mint $(b - d)$-t az $(a - d)$-vel párhuzamos helyzetbe. Azaz van olyan ε egységvektor, hogy

$$(b - c)\varepsilon = \lambda(a - c) \text{és} (b - d)\varepsilon = \mu(a - d),$$

ahol λ és μ valós számok. Tehát

$$\frac{a - c}{a - d} : \frac{b - c}{b - d} = \frac{\mu}{\lambda},$$

valós szám.



Definíció

Az $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ komplex számot, az a, b, c, d komplex számok *kettős viszony*ának nevezzük. Jel: $(abcd)$.

Ha $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \rho$ valós, akkor $\frac{a-c}{b-c} = \rho \frac{a-d}{b-d}$. Az $a-c$ és $b-c$ vektorok szöge vagy egyenlő az $a-d$ és $b-d$ vektorok szögével, vagy azt $180°$-ra egészíti ki.

Tétel

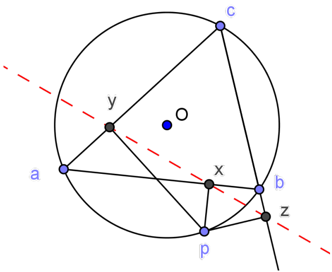
Ha négy pont egy körön van, akkor kettős viszonyuk valós; ha a kettős viszonyuk valós, akkor a négy pont vagy egy körön van, vagy egy egyenesen.

Tétel

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör tetszőleges pontjából az oldalegyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak.

Bizonyítás: Legyenek az O középpontú körön a háromszög csúcsai a, b, c, továbbá a köri pont, ahonnan a merőlegeseket állítjuk p. A p-ből (ab) egyenesére állított merőleges a kört másodszor $-\frac{ab}{p}$ pontban metszi. A két merőleges húr metszéspontja

$$x = \frac{a+b+p-\frac{ab}{p}}{2} = \frac{(a+b+p)p-ab}{2p}.$$



A másik két talppont:

$$y = \frac{(b+c+p)p - bc}{2p} \text{ész} = \frac{(c+a+p)p - ca}{2p}.$$

Az x, y, z egy egyenesen vannak, ha $\frac{x-z}{y-z}$ valós szám.

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{p(b-c) - ab + ca}{p(b-a) - bc + ca} = \frac{p(b-c) - a(b-c)}{p(b-a) - c(b-a)} =$$

$$\frac{(p-a)(p-c)}{(p-c)(b-a)} = (pbac).$$

A $(pbac)$ köri pontnégyes kettős viszonya - valós - tehát az x, y, z pontok egy egyenesen vannak.

Feladat

Számítsuk ki
$cos\frac{2\pi}{7} \cdot cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} \cdot cos\frac{6\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} \cdot cos\frac{2\pi}{7}$
pontos értékét.

Legyen most ε az első hetedik egységgyök: $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{7} + i \cdot sin\frac{2\pi}{7}$, továbbá $\varepsilon^7 = 1$. Mivel az ε egységnyi hosszúságú, ezért

$$\overline{\varepsilon} = cos\frac{2\pi}{7} - i \cdot sin\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{\varepsilon.}$$

Ebből már adódik is a sokszor használható formula:

$$\varepsilon + \overline{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = 2 \cdot cos\frac{2\pi}{7}.$$

Ezt felhasználva a kiszámítandó kifejezés átírható:

$$\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^4+1}{2\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^4+1}{2\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^6+1}{2\varepsilon^3}+\frac{\varepsilon^6+1}{2\varepsilon^3}\cdot\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon}.$$

Közös nevezőre hozás után vegyük figyelembe, hogy $\varepsilon^7=1$, így

$$\frac{\varepsilon^8+\varepsilon^6+\varepsilon^4+\varepsilon^2+\varepsilon^{10}+\varepsilon^6+\varepsilon^4+1+\varepsilon^9+\varepsilon^7+\varepsilon^3+\varepsilon}{4\varepsilon^5}=$$

$$\frac{\varepsilon^6+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1}{2\varepsilon^5}=\frac{\varepsilon^6+\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1-\varepsilon^5}{2\varepsilon^5}=-\frac{1}{2},$$

mivel $\varepsilon^7-1=(\varepsilon-1)(\varepsilon^6+\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0$ és $\varepsilon\neq 1$.

Feladat

Legyenek $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ egy egységkörbe írt szabályos n-szög csúcsai. Igazoljuk, hogy

$$P_0P_1 \cdot P_0P_2 \cdot P_0P_3 \cdot \ldots \cdot P_0P_{n-1} = n.$$

Feltehetjük, hogy a sokszög éppen az n-edik egységgyökök szerint helyezkedik el és $P_0 = 1$. Tekintsük az $f(z) = z^n - 1$ polinomot, amelynek gyökei pontosan az n-edik egységgyökök. A gyöktényezős alakban ε az első egységgyök, $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot sin\frac{2\pi}{n}$:

$$f(z) = z^n - 1 = (z-1)(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)\ldots(z-\varepsilon^{n-1}).$$

Osszuk el mindkét oldalt $(z-1)$-gyel:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-1} = \frac{z^n - 1}{z-1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z^2 + z + 1 =$$

$$= (z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)\ldots(z-\varepsilon^{n-1}).$$

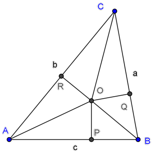
Számoljuk ki kétféleképpen a $g(1)$-et:

$$g(1) = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\ldots(1-\varepsilon^{n-1}),$$

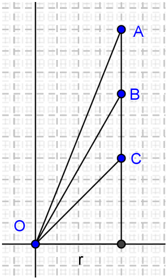
másrészt a $g(z)$ polinom n tagból áll:

$$g(1) = 1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1 = n.$$

Mindkét oldal abszolútértékét véve a jobb oldali tényezők éppen a P_0P_j távolságok.



Helyezzük
el most az OPA, OQB és ORC
háromszögeket úgy, hogy az
O pont mindegyik háromszögre
legyen a középpontban
és a háromszögek
r hosszúságú befogója
a valós tengelyre essen.
Így az A, B, C csúcsoknak
megfelelő komplex számok:



$$A = r + (s-a)i, B = r + (s-b)i, C = r + (s-c)i.$$

A három komplex szám argumentumának összege $90^o - \frac{\alpha}{2} + 90^o - \frac{\beta}{2} + 90^o - \frac{\gamma}{2} = 270^o - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 180^o$. Szorzásakor az argumentumok összeadódnak, ennek megfelelően a három szám szorzatának képzetes része nulla kell, hogy legyen.

$$A \cdot B \cdot C = [r + (s-a)i][r + (s-b)i][r + (s-c)i] =$$

$$= [r^3 - r(s-a)(s-b) - r(s-b)(s-c) - r(s-c)(s-a)] +$$

$$+ i[r^2(s-a) + r^2(s-b) + r^2(s-c) - (s-a)(s-b)(s-c)].$$

A képzetes rész nulla:

$$r^2(s-a+s-b+s-c) - (s-a)(s-b)(s-c) = 0.$$

Átrendezve és s-sel szorozva

$$r^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \Rightarrow t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög átlóvektorainak szorzata a szemköztes oldalvektorok szorzatának összegével egyenlő, azaz

$$(a-c)(b-d)=(a-d)(b-c)+(d-c)(b-a).$$

A műveletek elvégzése után a két oldal pontosan megegyezik. Ez egy algebrai azonosság.

Tétel (Ptolemaios-tétel)

Igazoljuk, hogy húrnégyszögben az átlók hosszának szorzata a szemköztes oldalhosszok szorzatainak összegével egyenlő.

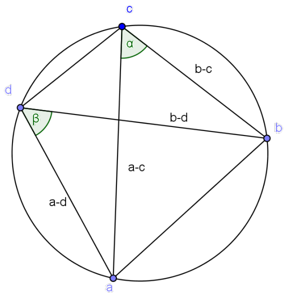
Tétel (Ptolemaios-tétel)

Igazoljuk, hogy húrnégyszögben az átlók hosszának szorzata a szemköztes oldalhosszak szorzatainak összegével egyenlő.

Bizonyítás: Legyen
$z_1 = (a-c)(b-d), z_2 = (a-d)(b-c)$
és $z_3 = (d-c)(b-a)$. Osszuk
végig az előző feladat azonosságát a z_2-vel.

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_2}.$$

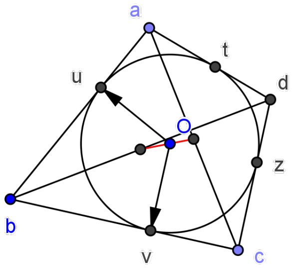
A törtek köri pontnégyesek kettős viszonyai tehát valósak, sőt a rajz szerint poztiív számok. A három vektor egyező irányú, így az összeg abszolút értéke egyenlő az összeadandók abszolút értékének összegével.



Tétel

Az érintőnégyszög beírt körének középpontja rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen.

Bizonyítás: Válasszuk origónak a kör középpontját. Legyenek az oldalakon az érintési pontok rendre u, v, w és t. Fejezzük ki a csúcsokat az érintési pontotk segítségével. 90°-os pozitív forgatással az u párhuzamos lesz $b-u$-val, a v pedig $v-b$-vel. Tudjuk, hogy $|b-u| = |v-b|$, így az egyenletrendszerből:



$$\lambda ui = b - u \text{ és } \lambda vi = v - b,$$

$$\frac{u}{v} = \frac{b-u}{v-b} \Rightarrow b = \frac{2uv}{u+v}.$$

$$\text{A többi csúcs ugyanígy:} c = \frac{2vw}{v+w}, d = \frac{2wt}{w+t}, a = \frac{2tu}{t+u}.$$

Be kell látni, hogy az átlók felezőpontjai, $f_1 = \frac{a+c}{2}$, $f_2 = \frac{b+d}{2}$ és az origó egy egyenesen vannak. Az f_1 valós számszorosa f_2-nek, arányuk valós.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{2tu}{t+u} + \frac{2vw}{v+w}}{\frac{2uv}{u+v} + \frac{2wt}{w+t}} = \frac{(u+v)(w+t)}{(t+u)(v+w)} = \frac{(u+v)}{(u+t)} : \frac{(w+v)}{(w+t)} = (uwvt).$$

Ez a négy pont egy körön van, a kettős viszonyuk valós.

Megjegyzés

Kicsit ügyesebb indulással el lehet kerülni a bizonyításban a kettős viszony használatát. Feltehetjük, hogy a kör egységnyi sugarú. Ekkor tetszőleges z köri pontra $\overline{z} = \frac{1}{z}$. A bizonyítás befejező sora:

$$\frac{\overline{f_1}}{\overline{f_2}} = \frac{(\overline{u}+\overline{v})(\overline{w}+\overline{t})}{(\overline{t}+\overline{u})(\overline{v}+\overline{w})} = \frac{(u+v)(w+t)}{(t+u)(v+w)} = \frac{f_1}{f_2}.$$

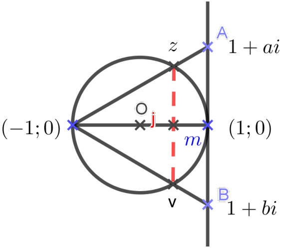
Tehát az arány valós.

Megjegyzés

A négyszög csúcsa a két érintési pont harmonikus közepe. A számtani közepük a szakasz felezőpontja. Mértani közepük kettő van, a két körívet felező pont. Tehát köri pontok esetén mind a négy közép rajta van a két pontot összekötő szakasz felezőmerőlegesén.

Feladat

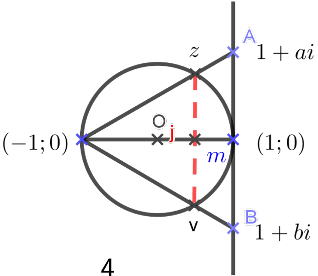
Az EF átmérőjű k kört az e egyenes az E pontban érinti. Tekintsük az e egyenes összes olyan A, B pontpárját, melyre az AB szakasz az E pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen pontpár esetén legyen A', illetve B' a k kör metszéspontja az AF, illetve BF szakasszal. Igazoljuk, hogy az $A'B'$ szakaszok egy ponton mennek keresztül.



Legyen a kör egységnyi sugarú, középpontja O pont. Számoljuk ki a z komplex számot. Egyrészt $(-1, 0)$, z és $1 + ai$ egy egyenesen vannak,

$$z - (-1) = \lambda(1 + ai - (-1)),$$

$$z = \lambda(2 + ai) - 1.$$



Másrészt tudjuk, hogy $z \cdot \overline{z} = 1$.

$$[\lambda(2 + ai) - 1][\lambda(2 - ai) - 1] = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{4 + a^2}.$$

Ebből már z számolható:

$$z = \frac{4(2 + ai)}{4 + a^2} - 1 = \frac{4(2 + ai)}{(2 + ai)(2 - ai)} - 1 = \frac{4}{2 - ai} - 1 = \frac{2 + ai}{2 - ai}.$$

A másik metszéspontra: $v = \frac{2+bi}{2-bi}$. A $z, 1, v, -1$ négy köri pont. A (zv) és $(-1, 1)$ húrok metszéspontja

$$m = \frac{zv(-1+1) - (-1)1(z+v)}{zv - (-1)1} = \frac{z+v}{zv+1}.$$

Behelyettesítés után

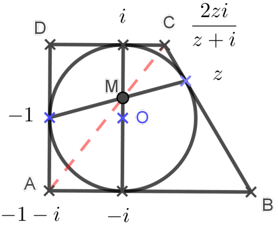
$$m = \frac{\frac{2+ai}{2-ai} + \frac{2+bi}{2-bi}}{\frac{2+ai}{2-ai}\frac{2+bi}{2-bi} + 1} = \frac{8+2ab}{8-2ab} = \frac{4+ab}{4-ab}.$$

A feladat szövege szerint ab rögzített, így ez a pont nem függ az A és B pontok választásától. Az a és b különböző előjelű valósak, így a nevező nem lesz nulla.

Feladat

Az ABCD derékszögű érintőtrapéz alapjai AB és CD ($AB > CD$), az alapokra merőleges szár AD. A trapézba írt kör az AB alapot P-ben, a CD alapot R-ben érinti. A szárakon lévő érintési pontokat összekötő szakasz a PR szakaszt M-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A, M és C egy egyenesbe esik.

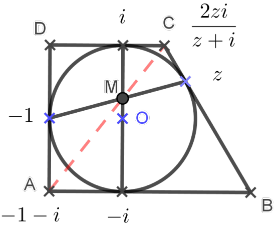
Legyen a trapézba írt kör középpontja O, sugara 1, alapjai párhuzamosak a valós tengellyel, AD szára párhuzamos a képzetes tengellyel. A kör érintési pontjai rendre $z, i, -1, -i$, az ábra szerint. A csúcsok: $a = -1 - i, c = \frac{2zi}{z+i}$.



M pont a kör húrjainak metszéspontja:
$m = \frac{-z(i-i)-(-i)i(z-1)}{-z-1} = \frac{-(z-1)}{-z-1} = \frac{z-1}{z+1}$.
Számoljuk ki az CMR szög tangensét:

$$\frac{\frac{2zi}{z+i} - i}{\frac{i-\frac{z-1}{z+1}}{i}} = \frac{\frac{-2z}{z+i} + 1}{i - \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{i-z}{z+i}}{\frac{iz-z+i+1}{z+1}} =$$

$$= \frac{(i-z)(z+1)}{(z+i)(i-z)(1-i)} = \frac{z+1}{(z+i)(1-i)}.$$



Végül a PMA szög tangense:

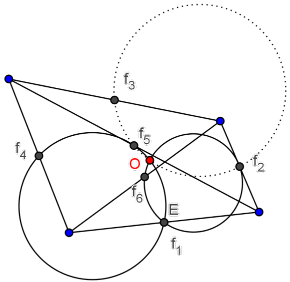
$$\frac{1}{\frac{\frac{z-1}{z+1}+i}{i}} = \frac{i}{\frac{z-1}{z+1} + i} = \frac{i(z+1)}{iz + i + z - 1} = \frac{z+1}{z+1+i-iz} = \frac{z+1}{(z+i)(1-i)}.$$

Az A, M és C pontok egy egyenesbe esnek.

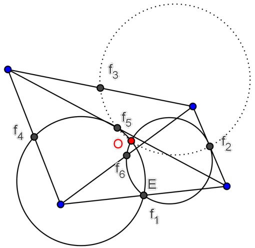
Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög csúcsaiból képzett háromszögek Feuerbach-körei egy ponton mennek át.

Legyenek a négyszög oldalainak és átlóinak felezőpontjai: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. Az O pontot úgy válasszuk meg, hogy az f_1, f_2, f_6 illetve az f_1, f_4, f_5 pontokon átmenő Feuerbach-körök az f_1-en kívül O-ban messék egymást. (Az O egybe is eshet f_1-gyel.) Elegendő azt megmutatni, hogy a két kör közös O metszéspontján pl. az $(f_1 f_3 f_5)$ kör is átmegy. A bizonyítás az $(f_3 f_4 f_6)$ körre hasonlóan menne.



Az $(of_6f_1f_2), (of_4f_5f_1)$ kettős viszonyok valósak.Bizonyítandó, hogy az $(of_3f_5f_2)$ kettős viszony is valós. Tudjuk, hogy



$$(of_6f_1f_2) = \frac{f_1}{f_2} : \frac{f_6 - f_1}{f_6 - f_2} = \lambda \in R,$$

$$(of_4f_5f_1) = \frac{f_5}{f_1} : \frac{f_4 - f_5}{f_4 - f_1} = \mu \in R.$$

Szorozzuk össze a két egyenlőséget:

$$\frac{f_5}{f_2} : \frac{(f_6 - f_1)(f_4 - f_5)}{(f_6 - f_3)(f_4 - f_1)} = \lambda\mu.$$

Tudjuk, hogy $f_4 - f_5 = f_6 - f_2$, mivel közös alapú háromszögek középvonalvektorai és ugyanilyen okból $f_6 - f_1 = f_3 - f_5$, továbbá $f_4 - f_1 = f_3 - f_2$. Ezeket behelyettesítve az egyszerűsítés után

$$\frac{f_5}{f_2} : \frac{f_3 - f_5}{f_3 - f_2} = \lambda\mu \in R, \text{ez éppen az} (of_3f_5f_2).$$

Az (xyz) és $(x'y'z')$ azonos irányítású háromszögek akkor és csak akkor hasonlók, ha az $x - z$ vektort ugyanaz a forgatva nyújtás viszi át az $y - z$ –be, mint amelyik $x' - z'$ –t az $y' - z'$ –be. Ez azt jelenti, hogy van olyan f komplex szám, amellyel $f(x - z) = y - z$ és $f(x' - z') = y' - z'$. Ebből pedig

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{x' - z'}{y' - z'}.$$

Feladat

Az $(oa_1b_1), (oa_2b_2), (oa_3b_3$ egy közös csúccsal rendelkező egyező körüljárású háromszögek, továbbá az a_1, a_2, a_3 csúcsok egy egyenesre illeszkednek. Mutassuk meg, hogy a b_1, b_2, b_3 csúcsok is kollineárisak.

Feladat

Mutassuk meg, hogy az $(abc)\triangle$ akkor és a csak akkor szabályos, ha $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Megoldás: Ha az (abc) háromszög szabályos, akkor egyben (abc) és (bca) háromszögek hasonlóak is. Használjuk az előző feltételt:

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{b-a}{c-a}.$$

Beszorzás és rendezés után

$$-a^2 + 2ca - c^2 = b^2 - ab - bc + ca,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Mivel az átalakítások oda-vissza elvégezhetők és az (abc) háromszög akkor és csak akkor hasonló a (bca) háromszöghöz, ha a háromszög szabályos, kaptunk egy „kényelmes" algebrai feltételt.

Feladat

Egy ABC háromszög oldalai fölé szerkesztett négyzetek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak. Mit mondhatunk az ABC háromszögről?

Megoldás: Legyen az eredeti háromszög (abc), a négyzetközéppontok által meghatározott pedig (xyz). Ha x az (ab) oldal fölé szerkesztett négyzet középpontja, akkor $x-a$ merőleges $b-x$ –re és vele egyenlő hosszúságú.

$$(x-a)i = b-x \;\Rightarrow\; x = \frac{b+ai}{1+i},$$

$$\text{és ugyanígy: } y = \frac{c+bi}{1+i},\; z = \frac{a+ci}{1+i}.$$

Annak feltétele, hogy (xyz) szabályos legyen

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

Behelyettesítve és $(1+i)^2$-nel beszorozva:

$$b^2 + 2abi - a^2 + c^2 + 2bci - b^2 + a^2 + 2cai - c^2 =$$

$$= bc + b^2 i + cai - ab + ca + c^2 i + abi - bc + ab + a^2 i + bci - ca.$$

Rendezve és i-vel egyszerűsítve pontosan:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Megjegyzés

Az (abc) háromszög szabályosságára ismert másik feltétel: ha $\omega = cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}$, az első harmadik egységgyök, a háromszög pozitív körüljárású szabályos, akkor és csak akkor, ha

$$a + \omega b + \omega^2 c = 0.$$

Legyen egy egyenes normálvektora n, adott pontja a. A z pont az egyenesen van, ha

$$z - a = \lambda i n.$$

Vegyük mindkét oldal konjugáltját, majd küszöböljük ki a λ-t.

$$z - \overline{a} = -\lambda i \overline{n},$$

$$\overline{n}(z - a) + n(\overline{z} - \overline{a}) = 0 \Rightarrow \overline{n}z + n\overline{z} = \overline{n}a + n\overline{a} = t.$$

A t valós szám, mert konjugáltak összege. Az egyenes egyenlete:

$$\overline{n}z + n\overline{z} = t.$$

Megfordítva, ha $n \neq 0$ és t valós, akkor az n normálvektorú és $a = \frac{t}{2\overline{n}}$ pontú egyenes egyenlete

$$\overline{n}z + n\overline{z} = \overline{n}a + n\overline{a} = \frac{\overline{n}t}{2\overline{n}} + \frac{nt}{2n} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

A c középpontú ρ sugarú kör egyenlete: $|z-c| = \rho$, amit írhatunk

$$(z-c)(\overline{z}-\overline{c}) = \rho^2,$$

$$z \cdot \overline{z} - \overline{c} \cdot z - c\overline{z} + c \cdot \overline{c} - \rho^2 = 0.$$

Jelöljük a $c \cdot \overline{c} - \rho^2$ valós számot s-sel. A kör egyenlete így:

$$z \cdot \overline{z} - \overline{c} \cdot z - c \cdot \overline{z} + s = 0.$$

Megfordítva, ha $c \cdot \overline{c} - s > 0$, akkor a fenti alakú egyenlet mindig kör egyenlete, mert $c \cdot \overline{c} - s = \rho^2$ helyettesítéssel az egyenlet $|z-c| = \rho$ alakra hozható. Ha $s = 0$, akkor a kör átmegy az O ponton.

Összefoglalva: az egyenes és a kör „közös" egyenlete

$$pz\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + s = 0$$

alakban adható meg. Az egyenes esetében

$$p = 0 \text{ és } c \neq 0.$$

A kör esetében a kör középpontja $\frac{c}{p}$, sugara $\sqrt{\frac{c\overline{c}}{2} - \frac{s}{p}}$.

Ha O a komplex számsík nullpontja és az alapkör sugara 1, akkor az inverzió

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$

alakban adható meg. A z és z' ugyanazon az O-ból induló félegyenesen vannak: ha z irányszöge φ, akkor $\overline{z}$ irányszöge $-\varphi$ és végül a $z' = \frac{1}{\overline{z}}$ irányszöge ismét φ. Milyen hatással van az inverzió a körre és az egyenesre? Induljunk ki a közös egyenletükből!

$$pz\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + s = 0.$$

Az inverz pontokra

$$\frac{p}{z\overline{z}} - \frac{\overline{c}}{\overline{z}} - \frac{c}{z} + s = 0,$$

Beszorzás után:

$$sz\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + p = 0.$$

Következtetések:

a.) az O-n átmenő egyenes $(p = 0, s = 0)$ képe önmaga;

b.) az O-n átmenő kör $(s = 0)$ képe az O-n át nem menő egyenes;

c.) az O-n át nem menő egyenes $(p = 0, s \neq 0)$ egyenes képe az O-n átmenő kör;

d.) az O-n át nem menő kör $(p \neq 0, s \neq 0)$ inverze az O-n át nem menő kör.

Irodalom

- Reiman István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó, (1999)
- Reiman István: *Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon*, Középiskolai szakköri füzet (1972)
- I.M. Yaglom: *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, London (internet)
- Titu Andreescu - Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*, internet (djvu)
- Fazekas M. Gimn. mat. munkaközösség: *Matkönyv: Geomatria 11.-12., Komplex számok a geomatriában fejezet*, `http://matek.fazekas.hu/`

Köszönöm a figyelmet!