Sokszögek csúcsainak színezése szomszédsági korlátozással

A feladat: Marcinak 3-féle színes ceruzája van. Hányféleképpen tudja kiszínezni az *ABCDEFGH* szabályos nyolcszög csúcsait úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek? Két színezés különböző, ha legalább egyik csúcs színében eltér egymástól. (Kenguru, 2004, 11.o.)

Első megoldás: a 8-szög színezéseinek klasszikus leszámolása:

Ha az *A* piros, akkor a piros csúcsok száma szerinti összeszámolást végzünk.

Ha 1 darab piros csúcs van, akkor a megfelelő színezések száma 2 (felváltva színezünk).

Ha 2 darab piros csúcs van, akkor a második piros csúcs 5 helyre kerülhet (6 csúcs közötti 5 helyre); a két láncot 2-2-féleképpen színezhetjük; ekkor összesen $5 \cdot 2^2$ megfelelő színezést kapunk.

Ha 3 darab piros csúcs van, akkor a két újabb piros csúcs $\binom{4}{2}$ helyre kerülhet, a megfelelő színezések száma $\binom{4}{2} \cdot 2^3$.

Ha 4 darab piros csúcs van, akkor pedig $\binom{3}{3} \cdot 2^4$.

Eredmény: Az első csúcs 3-féle lehet (nemcsak piros), így

$$3 \cdot \left(\binom{6}{0} \cdot 2 + \binom{5}{1} \cdot 2^2 + \binom{4}{2} \cdot 2^3 + \binom{3}{3} \cdot 2^4 \right) = 258.$$

Általánosítás *n*-szögre (3 színnel):

Ha k darab piros csúcs van, akkor a maradék $(n - k)$ csúcs $(n - k - 1)$ közbülső közt határoz meg. Az A-n kívüli $(k - 1)$ piros csúcsok számára így $\binom{n-k-1}{k-1}$ megfelelő helykiválasztás lehetséges, és ekkor a színezések száma $\binom{n-k-1}{k-1} \cdot 2^k$.

Eredmény: összesen tehát $3 \cdot \sum_{i=1} \binom{n-i-1}{i-1} \cdot 2^i$ a megfelelő színezések száma. (Az összegzés $n - i - 1 \geq i - 1$ esetén, azaz $i \leq \frac{n}{2}$-ig, vagyis $i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$-ig fut.)

Második megoldás (rekurzió): Jelölje $s(n)$ a megfelelő színezések számát (most $n = 8$ a kérdés, 3 szín esetén).

Legyen az A csúcs két szomszédja B és C ($n \geq 3$).

Ha B és C különböző színű, akkor A-t elvéve egy megfelelően színezett $(n - 1)$-szöget kapunk. B és C színezéséből A színe már adódik, ekkor tehát $s(n - 1)$ megfelelő színezés van.

Ha B és C azonos színű, akkor pl. A-t és B-t vesszük el. B-nek A-val ellentétes szomszédja kerül C mellé, ami megfelelő (különböző színűek); így egy megfelelően színezett $(n - 2)$-szöget kapunk. Mindegyik ilyen $(n - 2)$-szög esetén A és B kétféleképpen színezhető, ekkor tehát $2 \cdot s(n - 2)$ megfelelő színezés van.

A felírható rekurzió $s(n) = s(n-1) + 2 \cdot s(n-2)$, ahol $n \geq 3$. A kezdőtagok: $s(2) = 6$, $s(3) = 6$. A véges sorozat nyolcadik tagja: $s(4) = 18$, $s(5) = 30$, $s(6) = 66$, $s(7) = 126$, $s(8) = 258$. ($s(1) = 3$ nem elégíti ki a rekurziót.)

Általánosítás 3 helyett *k* színre:

Legyen az A csúcs két szomszédja ismét B és C ($n \geq 3$).

Ha B és C különböző színű, és az A-t vesszük el: ekkor az A csúcs $(k-2)$-féle színű lehet, így $(k-2) \cdot s(n-1)$ megfelelő színezés van.

Ha B és C azonos színű (pl. piros), akkor A-t és B-t vesszük el; ekkor az A csúcs $(k-1)$-féle színű lehet. A megfelelő színezések száma $(k-1) \cdot s(n-2)$.

A felírható rekurzió $s(n) = (k-2) \cdot s(n-1) + (k-1) \cdot s(n-2)$, ahol $n \geq 3$.

A kezdőtagok: $s(2) = k(k-1)$ és $s(3) = k(k-1)(k-2)$.

Elemzés

Nevezzük megfelelőnek egy sorozat tagjainak (vagy egy sokszög csúcsainak) a színezését, ha a szomszédos tagok (csúcsok) különböző színűek.

Jelölje p (piros), k, z a színeket. Az n-hosszú sorozatok megfelelő színezéseit az alábbiak szerint osztályozzuk:

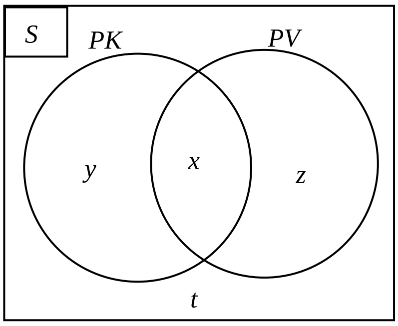
$p(n)$: azon n-hosszú, megfelelően színezett sorozatok száma, amelyek pirossal kezdődnek és pirossal is végződnek.

$q(n)$: azon n-hosszú, megfelelően színezett sorozatok száma, amelyek pirossal kezdődnek és nem pirossal végződnek.

$a(n)$: azon n-hosszú, megfelelően színezett sorozatok száma, amelyek nem pirossal kezdődnek és nem pirossal végződnek.

$b(n)$: azon n-hosszú, megfelelően színezett sorozatok száma, amelyek nem pirossal kezdődnek és pirossal végződnek.

Egyszerű összefüggések:



Jelölje a Venn-diagramon PK és PV az n-hosszú, megfelelően színezett, pirossal kezdődő, illetve pirosra végződő sorozatok halmazát. Ha x, y, z, t az egyes részhalmazok elemszámát jelöli, akkor

a) $x + y + z + t = 3 \cdot 2^{n-1}$;

b) $x + y = 2^{n-1}$;

c) $x + z = 2^{n-1}$; (megfordíthatóság; $y = z$ nyilván)

Ez még csak 3 összefüggés, az egyes elemszámok meghatározásához szükség van további összefüggésre.

A megfelelően színezett n-hosszú sorozatok száma $3 \cdot 2^{n-1}$.

d) Ezért $p(n) + q(n) + a(n) + b(n) = 3 \cdot 2^{n}$.

e) $q(n) = b(n)$ (megfordíthatóság)

f) $p(n) = b(n-1)$ (első piros tag leválasztása)

g) $q(n) = a(n-1)$ (első piros tag leválasztása)

h) $a(n) = a(n-1) + 2a(n-2)$ (2. tag nem piros vagy piros)

Más rekurziók is felírhatók, de ez utóbbi elegendő, mert $a(n)$ ebből meghatározható.

***a*(*n*) explicit alakja:**

A karakterisztikus egyenlet $q^2 - q - 2 = 0$, ennek gyökei $q_1 = -1$ és $q_2 = 2$.
$a(n) = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2^n$.
A kezdőtagok: $a(2) = 2$, $a(3) = 6$, $a(4) = 10$. ($a(1) = 2$ értelmezése kérdéses.)
$n = 2$-re $a(2) = 2 = A + 4B$; $n = 3$-ra $a(3) = 6 = -A + 8B$.
Az egyenletrendszer megoldása $(A, B) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, így $a(n) = \frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^n\right)$.

Visszahelyettesítve $a(4) = 10$ kijön. A képlet $n = 1$-re $a(1) = 2$-t ad, ami egyezik, így $n \geq 1$ esetén érvényes a képlet.

A Venn-diagramhoz visszatérve tehát $t = a(n) = \frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^n\right)$.

$|PK \cap PV| = |PK| + |PV| - |PK \cup PV| = |PK| + |PV| - (|S| - t)$, így

$|PK \cap PV| = 2\cdot 2^{n-1} - (3\cdot 2^{n-1} - \frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^n\right) = \frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^n\right) - 2^{n-1}$, azaz

$x = t - 2^{n-1} = \frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^{n-2}\right)$.

A kezdő- és utolsó tagok alapján 9 lehetséges megfelelően színezett n-hosszú sorozat van, ezek darabszáma:

p…p, k…k, z…z: $x = \frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^{n-2}\right)$, ilyen sorozat összesen $3\cdot\frac{2}{3}\cdot\left((-1)^{n-1} + 2^{n-2}\right) =$ $(-1)^{n-1}\cdot 2 + 2^{n-1}$ db van.

p…k, p…z, …, z…p: $\frac{y}{2} = \frac{z}{2}$; ilyen sorozat összesen $\frac{3\cdot 2^{n-1} - \left((-1)^{n-1}\cdot 2 + 2^{n-1}\right)}{6} =$ $\frac{2^n + (-1)^n\cdot 2}{6}$ darab van. (Azaz $y = z = \frac{2^n + (-1)^n\cdot 2}{3}$.)

Szabályos *n*-szög csúcsainak *s*(*n*)-féle színezése:

Ha egy kiválasztott csúcs pl. piros, akkor a maradék $(n - 1)$ csúcsot $a(n - 1)$-féleképpen színezhetjük. Piros helyett bármely színt választhatjuk, összesen 3-félét; a színválasztás szimmetriája miatt $s(n) = 3\cdot a(n - 1) = 2\cdot(-1)^n + 2^n$, ha $n \geq 2$. ($s(1) = 3$.)

Ellenőrzés: $s(2) = 3\cdot 2 = 6$ egyezik; $s(3) = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ egyezik; $s(4) = 3\cdot 2\cdot(2 + 1) = 18$ egyezik.

Általánosítás a színek számára, sorozat esetén: ugyanez a feladat, ha k színnel színezhetünk (eddig $k = 3$ volt).

$a(n) = (k - 2)\cdot a(n - 1) + (k - 1)\cdot a(n - 2)$ (2. tag nem piros vagy piros).

A karakterisztikus egyenlet $q^2 - (k - 2)q - (k - 1) = 0$, gyökei $q_1 = -1$ és $q_2 = (k - 1)$.
$a(n) = A\cdot(-1)^n + B\cdot(k - 1)^n$.
A kezdőtagok: $a(1) = k - 1$, $a(2) = (k - 1)(k - 2)$, $a(3) = (k - 1)^2 + (k - 1)(k - 2)^2$.
$n = 1$-re $a(1) = k - 1 = -A + B(k - 1)$; $n = 2$-re $a(2) = (k - 1)(k - 2) = A + B(k - 1)^2$.

Az egyenletrendszer megoldása (A, B) = $\left(\frac{1-k}{k}, \frac{k-1}{k}\right)$, így

$$a(n) = \frac{k-1}{k} \cdot \left((-1)^{n-1} + (k-1)^n\right).$$

Visszahelyettesítve $a(4)$ kijön, a képlet $n \geq 1$ esetén érvényes.

Általánosítás a színek számára, *n*-szög esetén: ugyanez a feladat, ha k színnel színezhetjük az n-szög csúcsait (eddig $k = 3$ volt).

Ha egy kiválasztott csúcs pl. piros, akkor a maradék $(n - 1)$ csúcsot $a(n - 1)$-féleképpen színezhetjük. Piros helyett bármely színt választhatjuk, összesen k-félét; a színválasztás szimmetriája miatt $s(n) = k \cdot a(n - 1) = (k-1)\left((-1)^n + (k-1)^{n-1}\right) = (-1)^n \cdot (k-1) + (k-1)^n$, ha $n \geq 2$. ($s(1) = k$.)

Ellenőrzés: $s(2) = k \cdot (k - 1)$ egyezik; $s(3) = k \cdot (k - 1)(k - 2)$ egyezik.