Minden, ami gyök

Gyűjtötték és javasolták

Lackó László, Pintér Ferenc, Róka Sándor, Schultz János, Szoldatics József

Megoldotta és leírta

Szoldatics József

2017. március 30.

Tartalomjegyzék

1. Előszó **3**

2. Akiktől a feladatok származnak **4**

3. Feladatok **5**
3.1. Gyökös átalakítások, egyenlőség 5
3.2. Gyökös átalakítások, egyenlőtlenség 6
3.3. Négyzetgyökös egyenletek 7
3.4. Köb– és magasabb gyökös egyenletek 12
3.5. Négyzetgyökös egyenlőtlenségek 14
3.6. Gyökös egyenletrendszerek, 2 ismeretlen 15
3.7. Gyökös egyenletrendszerek, 3 vagy több ismeretlen 18

4. Megoldások **19**
4.1. Gyökös átalakítások, egyenlőség 19
4.2. Gyökös átalakítások, egyenlőtlenség 23
4.3. Négyzetgyökös egyenletek 25
4.4. Köb– és magasabb gyökös egyenletek 54
4.5. Négyzetgyökös egyenlőtlenségek 65
4.6. Gyökös egyenletrendszerek, 2 ismeretlen 67
4.7. Gyökös egyenletrendszerek, 3 vagy több ismeretlen 80

1. Előszó

Amikor Pintér Ferenc feladataival először találkoztam, akkor egyből láttam, ez egy hasznos gyűjtemény. Valamiképpen ki kellene dolgozni, jött az ötlet. No persze nem az első lépéstől az utolsóig, hanem csak útmutatásként, főbb lépések megjelölésével, végeredmények megadásával. És ez lett belőle. Aztán dagadt az anyag, újabb feladatok is kerültek bele, további kollégák csatlakoztak, adtak újabb feladatokat, újabb témaköröket is. Majd valamilyen formában csoportosítani kellett, elkezdtem tehát „rendet vágni" a feladatok között. A mostani állás ez, ami itt van. Lehet. hogy másképpen kellett volna csoportosítani...

Idővel aztán másoktól is kapni kezdtem anyagokat.

Aki hibát, elírást talál, kérem, jelezze felém, hogy ki tudjam javítani. Valamint szívesen fogadok újabb feladatokat továbbra is.

Budapest, 2017. március 22.

Szoldatics József

Az itt található feladatok magját a tanári pályám során gyűjtöttem, és folyamatosan gépeltem be MSWord dokumentumban.

Ezért az egyes feladatok rendezetlenül követik egymást, nincs semmilyen pedagógiai, didaktikai elv szerint rendezve. Ez szerintem előnye is és hátrányai is az anyagnak. Előnye a diák számára van, mert nem nagyon követhet sablonokat, hátránya a kollégának van, mert adott módszerhez válogatnia kell a viszonylag bő anyagból.

A feladatok döntő többsége orosz nyelvű feladatgyűjteményekből és folyóiratokból származik. A feladatok megoldásának leírásához soha nem volt időm, az anyagot barátaim számára elérhetővé tettem.

Ennek köszönhető, hogy egykori szakkörös diákom, ma már kollégám, barátom, Szoldatics József tanár úr gondozásba vette az összegyűjtött anyagot, elkészítette a megoldásokat és kifogástalan nyomdai formába (TEX) öntötte és szélesebb körben elérhetővé tette. Fáradozását ez úton is köszönöm.

Nagykanizsa, 2017. március 1.

Pintér Ferenc

2. Akiktől a feladatok származnak

- ***Lackó László***
  Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
- ***Róka Sándor***
  Nyíregyházi Egyetem
- ***Pintér Ferenc***
  Zalai Matematikai Tehetségekért (ZALAMAT) Alapítvány
- ***Schultz János***
  Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium
- ***Szoldatics József***
  Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

3. Feladatok

Oldjuk meg a következő feladatokat a valós számok halmazán! A feladatokban szereplő a, b, ... betűk paramétereket jelölnek.

3.1. Gyökös átalakítások, egyenlőség

I.1. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$ $\boxed{2\sqrt{2}}$

I.2. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$ $\boxed{2}$

I.3. $\sqrt{19+6\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$ $\boxed{6\sqrt{2}}$

I.4. $\sqrt{19+6\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$ $\boxed{2}$

I.5. a) $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\quad (a\geq 0;\ b\geq 0;\ a^2\geq b)$ $\boxed{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$

b) $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\quad (a\geq 0;\ b\geq 0;\ a^2\geq b)$ $\boxed{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

I.6. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$ $\boxed{1}$

I.7. $\sqrt{2+8\sqrt{2+4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}+\sqrt{2+8\sqrt{2-4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}=$ $\boxed{8}$

I.8. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=$ $\boxed{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}$

I.9. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$ $\boxed{\sqrt{2}}$

I.10. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2}}=$ $\boxed{1}$

I.11. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=$ $\boxed{\sqrt{n}-1}$

I.12. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n}}=$ $\boxed{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

3.2. Gyökös átalakítások, egyenlőtlenség

II.1. a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{5}$
b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

II.2. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$

II.3. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}<3$

II.4. $\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{\ldots+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{a^2-a}}}}}<a; \qquad a>1$

II.5. $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$

3.3. Négyzetgyökös egyenletek

III.1. $\sqrt{3x^2-x-2}=x-1$ — $x=1$

III.2. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$ — $x=1$

III.3. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$ — $x_1=1;\ x_2=-\frac{8}{3}$

III.4. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ — $5\le x\le 10$

III.5. $x^5-33x^2\sqrt{x}+32=0$ — $x_1=1;\ x_2=4$

III.6. $x^3-3x\sqrt{x}+2=0$ — $x_1=1;\ x_2=\sqrt[3]{4}$

III.7. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$ — $x_{1;2}=\pm5$

III.8. $x^2-\sqrt{x^2-9}=21$ — $x_{1;2}=\pm5$

III.9. $\dfrac{x^3+\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=a^2$ — $x_1=0;\ x_{2;3}=\pm a$

III.10. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2}$ — $x_1=1;\ x_2=3$

III.11. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$ — $\emptyset$

III.12. $\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{4-x}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{x-3}{4-x}}$ — $x_1=\frac{7}{2};\ x_2=\frac{48}{13}$

III.13. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$ — $\emptyset$

III.14. $\sqrt{23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}}=5$ — $x=-7$

III.15. $x\left(x+\sqrt{x}\right)=1-x\left(1+\sqrt{x}\right)$ — $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

III.16. $x=a+\sqrt{a^2+x\sqrt{x+a^2}}$ — $x_{1;2}=\dfrac{4a+1\pm\sqrt{4a^2+8a+1}}{2}$

III.17. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$ — $x=7$

III.18. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}$ — $x=-\dfrac{4}{3}a$

III.19. $x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}$ — $x_1=-9;\ x_2=4$

III.20. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0$	$x_1=-4;\ x_2=1$
III.21. $x^2+4x-8\sqrt{8x}+20=0$	$x=2$
III.22. $x^2-3x-6\sqrt{3x}+18=0$	$x=3$
III.23. $x^2-3x-2\sqrt{2x}+6=0$	$x=2$
III.24. $x^{10}-x^5-2\sqrt{x^5}+2=0$	$x=1$
III.25. $x^2-3x-5\sqrt{9x^2+x-2}=2,75-\frac{28}{9}x$	$x_{1;2}=\frac{-1\pm\sqrt{298408}}{9}$
III.26. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$	$0\leq x\leq 3$
III.27. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=3$	$x=\frac{97}{144}$
III.28. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$	$x_1=-5;\ x_2=4$
III.29. $\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2$	$\emptyset$
III.30. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4$	$x_{1;}=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}$
III.31. $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+1$	$\emptyset$
III.32. $x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2=4(\sqrt{x}-1)$	$x=1$
III.33. $x^2+2(x+1)\sqrt{x}+3x=8$	$x=1$
III.34. $x^3+4x\sqrt{(x-1)^3}+3x^2-8x+4=0;\quad x\geq 1$	$x=1$
III.35. $x^6-x^3-2x^2-1=2\left(x-x^3+1\right)\sqrt{x}$	$x=\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
III.36. $(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2x=46$	$x=4$
III.37. $2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)^2$	$x_1=1;\ x_2=2$
III.38. $x\left(x-2\sqrt{x-1}\right)=2\sqrt{x-1}-3x$	$\emptyset$
III.39. $(x-1)[1-x(1+2\sqrt{x})]=x^3-(x-1)^2;\ x\geq 1$	$x=\emptyset$
III.40. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$	$x=-\frac{1}{2}$

III.41. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ — $\boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2};\ x_2=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},\text{ ha } a\geq 1}$

III.42. $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$ — $\boxed{x=\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}}$

III.43. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ — $\boxed{x=\frac{16}{25}}$

III.44. $\sqrt{5+x+4\sqrt{x+1}}=2+\sqrt{x+1}$ — $\boxed{x\geq -1}$

III.45. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$ — $\boxed{-1\leq x\leq 0}$

III.46. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2$ — $\boxed{\emptyset}$

III.47. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$ — $\boxed{x=3}$

III.48. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}+5$ — $\boxed{x_{1,2}=\pm 4}$

III.49. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$ — $\boxed{x_1=2;\ x_2=3}$

III.50. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ — $\boxed{x=4}$

III.51. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$ — $\boxed{\emptyset}$

III.52. $\sqrt{x(1+\sqrt{x})}-\sqrt{x(1+x)}=\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sqrt{x}}$ — $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

III.53. $\left(1-\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)\sqrt{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}$ — $\boxed{x=0}$

III.54. $(1+x)\sqrt{1+x}-(1-x)\sqrt{1-x}=x$ — $\boxed{x=0}$

III.55. $2(x-1)=(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)$ — $\boxed{x_1=1;\ x_2=\frac{1}{25}}$

III.56. $\frac{1}{4}x=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)$ — $\boxed{x=0}$

III.57. $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x}=3$ — $\boxed{x=\frac{1}{4}}$

III.58. $bx\sqrt{a+x}+ab\sqrt{a+x}=a\sqrt{x^3}$ — $\boxed{a=b=0;\ \forall x\in\mathbb{R}}$

$\boxed{ab=0;\ a\neq b;\ x=0}$ $\boxed{a\neq b;\ ab\neq 0;\ x=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}}$

III.59. $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{5-2x}$ — $\boxed{x_1=2;\ x_2=3}$

III.60. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\boxed{x=81}$

III.61. $1+\sqrt{1-\dfrac{a}{x}}=\sqrt{1+\dfrac{x}{a}}$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

III.62. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}=\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$ $\boxed{x=0}$

III.63. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}+\dfrac{16}{(x+2)(3x+10)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ $\boxed{x=2}$

III.64. a) $\sqrt{x-a}-\sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$ $\boxed{a=0;\ \forall x\geq 0x}$

b) $\sqrt{x-a}-\sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}}=\sqrt{a+x}$ $\boxed{a=0;\ \forall x\geq 0; a\neq 0;\ x=-\frac{5}{4}a}$

III.65. $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\dfrac{x}{a}$ $\boxed{\emptyset}$

III.66. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}+1=0$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4a-2b}{2a^2b}}}$

III.67. a) $\dfrac{x\left(\sqrt{x-1}\right)^3\sqrt{x}-1}{x-(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+x-1}{x-(\sqrt{x}-1)}=2$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

b) $\dfrac{x(\sqrt{x}-1)^3\sqrt{x}-1}{x-(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+x-1}{x-(\sqrt{x}-1)}=2$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

III.68. $\dfrac{a(x+a)+a\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}+a}=\sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{x}$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

III.69. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=2$ $\boxed{x=0}$

III.70. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$ $\boxed{x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{1369}}{10}}$

III.71. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}=1$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

III.72. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$ $\boxed{x=\frac{25}{16}}$

III.73. $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

III.74. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{2}}$

III.75. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$ $\boxed{x_1=1;\ x_{2,3}=\tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

III.76. $\frac{a-x}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}+\frac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\sqrt{a}$ $\boxed{x=0}$

III.77. $\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$ $\boxed{a=0;\ x_1=0;\ x_2=\frac{2}{\left(\frac{a+1}{1-a}\right)^2-1}}$

III.78. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{2}}$

III.79. $x-10+6\sqrt{\frac{x-10}{x+5}}-\frac{40}{x+5}=0$ $\boxed{x_1=-10;\ x_2=11}$

III.80. $x+25-52\sqrt{\frac{x+25}{x-17}}-\frac{1440}{x-17}=0$ $\boxed{x_1=-33;\ x_2=71}$

III.81. $\sqrt{x+27}-\sqrt{x-13}=\sqrt{x-6}$ $\boxed{x=22}$

III.82. $x^2-4=\sqrt{x+4}$ $\boxed{x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$

III.83. $\sqrt{3x^2+2x+m}=x+2$ $\boxed{x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9-2m}}{2}}$

III.84. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}=1$ $\boxed{\emptyset}$

3.4. Köb– és magasabb gyökös egyenletek

IV.1. $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$ $\boxed{x=7}$

IV.2. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=\frac{63}{65}a}$

IV.3. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$ $\boxed{x=1}$

IV.4. $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x}$ $\boxed{x=16}$

IV.5. $2\sqrt[3]{x}+5=63\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ $\boxed{x_1=-343;\ x_2=\dfrac{729}{8}}$

IV.6. $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=20$ $\boxed{x_{1;2}=\pm 8}$

IV.7. $a^3+2(x-a)=3a\sqrt[3]{(x-a)^2}$ $\boxed{x_1=a^3+a;\ x_2=-\dfrac{a^3}{8}+a}$

IV.8. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$ $\boxed{x_1=80;\ x_2=-109}$

IV.9. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$ $\boxed{x=4416}$

IV.10. $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+7$ $\boxed{y_1=0;\ x_2=-19}$

IV.11. $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x\sqrt{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{a\sqrt{x}}}=\sqrt[4]{b}$ $\boxed{x=\left(\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{b}\right)^6}$

IV.12. $\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=b$ $\boxed{{}_{1,2}=\frac{a}{b}\pm\frac{b^3-a^2}{3b^2}}$

IV.13. $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=0$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

IV.14. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ $\boxed{x=0}$

IV.15. $\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2-x^3}}+\sqrt{1-x+\sqrt[3]{x(1-x)^2}}=1$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

IV.16. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=\frac{63}{65}a}$

IV.17. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{a^2-x^2}$ $\boxed{\emptyset}$

IV.18. $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4a^2}}+\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4x^2}}=b$ $\boxed{x=\left(\sqrt{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}}\right)^3}$

IV.19. $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+x}}=1$

$\boxed{x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=-2;\ x_4=-9}$

IV.20. $\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}=2\sqrt[8]{a^2-x^2}$ — $x=0$

IV.21. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$ — $x_{1,2}=\frac{\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n+1}{\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n-1}$

IV.22. $\sqrt[n]{(x+a)^3}+2\sqrt[n]{x^3}=3\sqrt[n]{x^2(x+a)}$ — $x=\frac{a}{(-2)^n-1}$

IV.23. $(1+\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^2}+(1+\sqrt[3]{a})\sqrt[3]{a^2}=2\sqrt[3]{ax}\,(1+\sqrt[6]{ax})$ — $x=a$

IV.24. $\sqrt[5]{(3x-5)^3}-\sqrt[5]{(5-3x)^{-3}}=-\frac{52}{10}$ — $x_1=\frac{5-\sqrt[3]{5^5}}{3};\ x_2=\frac{5-\sqrt[3]{\frac{1}{5^5}}}{3}$

IV.25. $\left(\sqrt[7]{x-1}+\sqrt[7]{x+1}\right)^2+5\left[\sqrt[7]{(x-1)^2}-\sqrt[7]{(x+1)^2}\right]+6\left(\sqrt[7]{x-1}-\sqrt[7]{x+1}\right)^2=0$ — $\frac{3^7+1}{3^7-1};\ \frac{2^7+1}{2^7-1}$

IV.26. $\left(\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x-a}\right)^3\left(\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x-a}\right)=2b$ — $x_{1,2}=a+\frac{2a}{1-\left(\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^4}$

IV.27. $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\frac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=21\frac{1}{3}\sqrt[7]{x}$ — $x_1=\frac{2}{21};\ x_2=-\frac{3}{32}$

IV.28. $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$ — $x_{1,2}=\frac{\mp a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}\pm 1}$

IV.29. $\frac{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{5-x}-\sqrt[4]{x-2}}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}}$ — $x=\frac{167}{82}$

IV.30. $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2$ — $x=\frac{a-b}{2}$

IV.31. $\frac{\sqrt[m]{1+x^2}+\sqrt[m]{1-x^2}}{\sqrt[m]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}}=\frac{p}{q}$ — $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{(p+q)^m-(p-q)^m}{(p+q)^m+(p-q)^m}}$

3.5. Négyzetgyökös egyenlőtlenségek

V.1. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$

$-1 \leq x < \frac{8-\sqrt{31}}{8}$

V.2. $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$

$-\frac{9}{2} \leq x < \frac{45}{8};\ x \neq 0$

V.3. $\sqrt{3-2x-x^2}>x+2$

$-2 \leq x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$

V.4. $\sqrt{9x+7}<\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}<3\sqrt{x+1};\quad x \geq \frac{1}{2}$

Igaz az állítás

3.6. Gyökös egyenletrendszerek, 2 ismeretlen

VI.1. $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{5}{3}; \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+6}} = 2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$ $\boxed{M\left(16;\ 30\right)}$

VI.2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3; \\ xy = 4. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(1;\ 4\right);\ M_2\left(4;\ 1\right)}$

VI.3. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(1;\ 8\right);\ M_2\left(8;\ 1\right)}$

VI.4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(-1;\ -27\right);\ M_2\left(27;\ 1\right)}$

VI.5. $\begin{cases} x = 6\sqrt{x+y}, \\ y = 2\sqrt{x+y}. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(0;\ 0\right);\ M_2\left(48;\ 16\right)}$

VI.6. $\begin{cases} \left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 185, \\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 65. \end{cases}$ $\boxed{M_{1;2};\left(\pm 3;\ \pm 4\right);\ M_{3;4}\left(\pm 4;\ \pm 3\right)}$

VI.7. $\begin{cases} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{y^3} = 35, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 5. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(16;\ 81\right);\ M_2\left(81;\ 16\right)}$

VI.8. $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(8;\ 2\right);\ M_2\left(2;\ 8\right)}$

VI.9. $\begin{cases} x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(25;\ 9\right);\ M_2\left(\frac{49}{4};\ \frac{81}{4}\right)}$

VI.10. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}} + \sqrt{\dfrac{5x}{x+y}} = \dfrac{34}{15}, \\ x + y = 12. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(\frac{20}{3};\ \frac{16}{3}\right);\ M_2\left(\frac{108}{125};\ \frac{1392}{125}\right)}$

VI.11. $\begin{cases} x + y - \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$ $\boxed{M_{1;2}\left(\pm 5; \pm 3\right)}$

VI.12. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3y-2x}{y}} + \sqrt{\dfrac{4y}{3y-2x}} = 2\sqrt{2}, \\ 3\left(x^2+1\right) = \left(y+1\right)\left(y-x+1\right). \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(1;\ 2\right);\ M_2\left(2;\ 4\right)}$

VI.13. $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(2;\ 8\right);\ M_2\left(8;\ 2\right)}$

VI.14. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 1 + \dfrac{7}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} = 78. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(4;\ 9)\,;\ M_2\,(9;\ 4)}$

VI.15. a) $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 420, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 280. \end{cases}$ $\boxed{M\,(18;\ 8)}$

b) $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 105, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 70. \end{cases}$ $\boxed{M\,(9;\ 4)}$

VI.16. $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(25;\ 36)\,;\ M_2\,(36;\ 25)}$

VI.17. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{x-y}} - \sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 32. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(9;\ 7)\,;\ M_2\,(-9;\ -7)}$

$\boxed{M_3\,(9;\ -7)\,;\ M_4\,(-9;\ 7)}$

VI.18. $\begin{cases} \sqrt[3]{6x+5} - \sqrt[3]{4x-3y} = 1, \\ 6x + 3y = 4. \end{cases}$ $\boxed{M_1 = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)}$

$\boxed{M_2 = \left(\dfrac{-317 + 45\sqrt{33}}{32}; \dfrac{1015 - 135\sqrt{33}}{48}\right)}$

$\boxed{M_3 = \left(\dfrac{-317 - 45\sqrt{33}}{32}; \dfrac{1015 + 135\sqrt{33}}{48}\right)}$

VI.19. $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ \left(x^2 + 1\right) y + \left(y^2 + 1\right) x = 4xy. \end{cases}$ $\boxed{M\,(1;\ 1)}$

VI.20. $\begin{cases} x + \sqrt{y} - 56 = 0, \\ \sqrt{x} + y - 56 = 0. \end{cases}$ $\boxed{M\,(49;\ 49)}$

VI.21. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,\left(\tfrac{13}{5};\ \tfrac{-5}{3}\right)\,;\ M_2\,(2;\ 3)}$

VI.22. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$ $\boxed{M\,(5;\ 4)}$

VI.23. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(1;7)\,;\ M_2\,\left(\tfrac{49}{64};\tfrac{41}{8}\right)\,;\ M_3\,(7;-8)}$

VI.24. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$ $\boxed{M_{1,2} = \left(10;\pm\sqrt{6}\right)}$

VI.25. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$

$\boxed{M_1(4;1);\; M_2\left(\frac{121}{64};\frac{169}{64}\right)}$

VI.26. $\begin{cases} \sqrt{x^2+3xp+p^2} - \sqrt{y^2+3yp+p^2} = x-y \\ xy = p^2 \end{cases}$

$\boxed{M_1 = (0;y);\; y \in \mathbb{R}; y \geq 0}$

$\boxed{M_2 = (x;0);\; x \in \mathbb{R}; x \geq 0}$ d

$\boxed{M_3 = (r;r);\; r \in \mathbb{R}}$

3.7. Gyökös egyenletrendszerek, 3 vagy több ismeretlen

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

VII.1. $\begin{cases} x^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ y^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ z^3 + xyz = \sqrt{xyz}. \end{cases}$

$M_1\left(0;\ 0;\ 0\right);\ M_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

VII.2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, \\ x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$

$M_1\left(4;\ 1;\ 1\right);\ M_2\left(1;\ 4;\ 1\right);\ M_3\left(1;\ 1;\ 4\right)$

VII.3. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = z, \\ 2x + 2y + a = 0, \\ z^4 + az^2 + b = 0. \end{cases}$

$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{4b+1-a^2}}{4};\ \frac{-1-\sqrt{4b+1-a^2}}{4};\ \frac{\sqrt{-2a+\sqrt{a^2-4b}}}{2}\right)$

$M_2\left(\frac{-1-\sqrt{4b+1-a^2}}{4};\ \frac{-1+\sqrt{4b+1-a^2}}{4};\ \frac{\sqrt{-2a+\sqrt{a^2-4b}}}{2}\right)$

VII.4. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$

$M\left(3;\ -2;\ 6\right)$

VII.5. $\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_{2017}} = \sqrt{2017}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} = 2017 \end{cases}$

$x_1 = 2017;\ x_i = 0$ és permutációi

4. Megoldások

4.1. Gyökös átalakítások, egyenlőség

I.1. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$ $\boxed{2\sqrt{2}}$

Megoldás

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=$$
$$=\left|\sqrt{2}+1\right|+\left|\sqrt{2}-1\right|=\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}$$

I.2. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$ $\boxed{2}$

Megoldás

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=$$
$$=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$$

I.3. $\sqrt{19+6\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$ $\boxed{6\sqrt{2}}$

Megoldás

$$\sqrt{19+6\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{38+12\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{38-12\sqrt{2}}{2}}=$$
$$\sqrt{\frac{(6+\sqrt{2})^2}{2}}+\sqrt{\frac{(6-\sqrt{2})^2}{2}}=\left|\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|$$
$$=\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$$

I.4. $\sqrt{19+6\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$ $\boxed{2}$

Megoldás

$$\sqrt{19+6\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{38+12\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{38-12\sqrt{2}}{2}}=$$
$$\sqrt{\frac{(6+\sqrt{2})^2}{2}}-\sqrt{\frac{(6-\sqrt{2})^2}{2}}=\left|\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|-\left|\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|=$$
$$=\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$$

I.5. a) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=$ $(a\geq 0;\ b\geq 0;\ a^2\geq b)$ $\boxed{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$

b) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=$ $(a\geq 0;\ b\geq 0;\ a^2\geq b)$ $\boxed{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

Megoldás

a)

$$x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};\qquad x\geq 0$$

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=$$

$$=a+2\sqrt{\frac{a^2-\left(a^2-b\right)}{4}}=a+\sqrt{b}\quad\Rrightarrow\quad x=\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

b)

$$x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};\qquad x\geq 0$$

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}-2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=$$

$$=a-2\sqrt{\frac{a^2-\left(a^2-b\right)}{4}}=a-\sqrt{b}\quad\Rrightarrow\quad x=\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

I.6. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$ $\boxed{1}$

Megoldás

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$$

I.7. $\sqrt{2+8\sqrt{2+4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}+\sqrt{2+8\sqrt{2-4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}=$ $\boxed{8}$

Megoldás

$$\sqrt{2+8\sqrt{2+4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}+\sqrt{2+8\sqrt{2-4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}=$$

$$=\sqrt{2+8\sqrt{2+4\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}}+\sqrt{2+8\sqrt{2-4\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}}=$$

$$=\sqrt{2+8\sqrt{2+4\left(\sqrt{2}+1\right)}}+\sqrt{2+8\sqrt{2-4\left(\sqrt{2}-1\right)}}=$$

$$=\sqrt{2+8\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\sqrt{2+8\sqrt{6-4\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{2+8\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}}+\sqrt{2+8\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}}=$$

$$= \sqrt{2+8\left(2+\sqrt{2}\right)} + \sqrt{2+8\left(2-\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{\left(4+\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2} =$$
$$= 4+\sqrt{2}+4-\sqrt{2} = 8$$

I.8. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$ $\boxed{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}$

Megoldás

$$x = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \qquad x > 0$$
$$x^2 = \left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 =$$
$$= 8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + 8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$$
$$= 16+2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)} = 16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}} = 16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}} =$$
$$= 16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 16+4\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = 16+4\left(\sqrt{5}-1\right) = 12+4\sqrt{5} = 2\left(6+2\sqrt{5}\right) =$$
$$= 2\left(\sqrt{5}+1\right)^2 \quad \Rrightarrow \quad x = \sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

2. Megoldás

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{16+4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}} + \sqrt{\frac{16-4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{16+\sqrt{160+32\sqrt{5}}}{2}} + \sqrt{\frac{16-\sqrt{160+32\sqrt{5}}}{2}} =$$

Az I.5. azonosságot használva: $a = 16$ és $b = 96-32\sqrt{5}$

$$= \sqrt{16+\sqrt{96-32\sqrt{5}}} = \sqrt{16+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-4\right)^2}} = \sqrt{16+4\sqrt{5}-4} = \sqrt{12+4\sqrt{5}} =$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

I.9. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} =$ $\boxed{\sqrt{2}}$

Megoldás

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}} =$$
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)} + \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\right)}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}+1\right)}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

I.10. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2}}=$ $\boxed{1}$

Megoldás

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3}-10}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}{2\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{3-1}{2}=1$$

I.11. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=$ $\boxed{\sqrt{n}-1}$

Megoldás

Használjuk a következő átalakítást:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$$

I.12. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n}}=$ $\boxed{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Megoldás

Használjuk a következő átalakítást:

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

4.2. Gyökös átalakítások, egyenlőtlenség

II.1. a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{5}$
b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

Megoldás

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}+\sqrt{3}&>\sqrt{5} \qquad / \ (\ldots)^2\\ 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3&>5\\ 2\sqrt{2}\sqrt{3}&>0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{a}+\sqrt{b}&>\sqrt{a+b} \qquad / \ (\ldots)^2\\ a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b&>a+b\\ 2\sqrt{a}\sqrt{b}&>0 \end{aligned}$$

II.2. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$

Megoldás

$$\begin{aligned} \sqrt{2}&<2\\ 2+\sqrt{2}&<4\\ \sqrt{2+\sqrt{2}}&<2\\ 2+\sqrt{2+\sqrt{2}}&<4\\ &\ldots\\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}&<2 \end{aligned}$$

II.3. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}<3$

Megoldás

$$\begin{aligned} \sqrt{6}&<3\\ 6+\sqrt{6}&<9\\ \sqrt{6+\sqrt{6}}&<3\\ 6+\sqrt{6+\sqrt{6}}&<9\\ &\ldots\\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}&<3 \end{aligned}$$

II.4. $\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{\ldots+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{a^2-a}}}}} < a; \qquad a>1$

Megoldás

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2-a} &< a \\
\left(a^2-a\right)+\sqrt{a^2-a} &< a^2 \\
\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{a^2-a}} &< a \\
\left(a^2-a\right)+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{a^2-a}} &< a^2 \\
&\ldots \\
\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{\ldots+\sqrt{(a^2-a)+\sqrt{a^2-a}}}}} &< a
\end{aligned}$$

II.5. $\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$

Megoldás

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k}}{(k+1)k}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=$$
$$=\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}=2-\frac{2}{n+1}<2$$

4.3. Négyzetgyökös egyenletek

III.1. $\sqrt{3x^2-x-2}=x-1$ $\boxed{x=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $1 \le x$

$$\sqrt{3x^2-x-2}=x-1 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2x^2+x-3=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1}$$

III.2. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$ $\boxed{x=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge -4$

$$\sqrt{x+8}+2=\sqrt{5x+20} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{x+8}=x+2; \qquad / \ (\ldots)^2; \qquad (x \ge -2)$$
$$x^2+3x-4=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1}$$

III.3. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$ $\boxed{x_1=1;\ x_2=-\frac{8}{3}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \le \dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$ vagy $\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6} \le x$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=\sqrt{3x^2+5x+1}+1 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$3=\sqrt{3x^2+5x+1} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$3x^2+5x-8=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=1} \text{ és } \boxed{x_2=-\frac{8}{3}}$$

III.4. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ $\boxed{5 \le x \le 10}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge 1$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$$
$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$$
$$\sqrt{x-1}=y \qquad (y \ge 0)$$
$$|y-2|+|y-3|=1$$
$$2 \le y \le 3$$
$$2 \le \sqrt{x-1} \le 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{5 \le x \le 10}$$

III.5. $x^5-33x^2\sqrt{x}+32=0$ $\boxed{x_1=1;\ x_2=4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge 0$

$$y=x^2\sqrt{x} \qquad (y \ge 0)$$

$$y^2 - 33y + 32 = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1}$$
$$y_2 = 32 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 4}$$

III.6. $x^3 - 3x\sqrt{x} + 2 = 0$ $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = \sqrt[3]{4}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$y = x\sqrt{x} \qquad (y \geq 0)$$
$$y^2 - 3y + 2 = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1}$$
$$y_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \sqrt[3]{4}}$$

III.7. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$ $\boxed{x_{1;2} = \pm 5}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$y = \sqrt{x^2 + 11} \qquad (y > 0)$$
$$y^2 + y - 42 = 0$$
$$y = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1;2} = \pm 5}$$

2. Megoldás

Az egyenlet bal oldala szigorúan monoton növekvő x^2-re nézve, jobb oldala állandó. Ha van megoldás, akkor csak egy megoldás lehet (x^2-ben), ez pedig $x^2 = 25$. Ekkor $\boxed{x_{1;2} = \pm 5}$.

III.8. $x^2 - \sqrt{x^2 - 9} = 21$ $\boxed{x_{1;2} = \pm 5}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|x| \geq 3$

$$y = \sqrt{x^2 - 9} \qquad (y \geq 0)$$
$$y^2 - y - 12 = 0$$
$$y = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1;2} = \pm 5}$$

III.9. $\dfrac{x^3 + \left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = a^2$ $\boxed{x_1 = 0;\ x_{2;3} = \pm a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|x| \leq |a|\,;\ a \neq 0;\ x \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,|a|$

$$\frac{x^3 + \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = a^2$$

$$\frac{\left(x^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2)\right)\left(x + \sqrt{a^2 - x^2}\right)}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = a^2$$
$$x^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2) = a^2$$
$$x\sqrt{a^2 - x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0;\ x_{2;3} = \pm a}$$

III.10. $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$ $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = 3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$|x-2| + |x+1| = |x+2| \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1;\ x_2 = 3}$$

III.11. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$|x-2| - |x-3| = |x-1| \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \emptyset}$$

III.12. $\dfrac{\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{4-x}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{x-3}{4-x}}$ $\boxed{x_1 = \frac{7}{2};\ x_2 = \frac{48}{13}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $3 \le x < 4$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{x-3}{4-x}} + 1}{\sqrt{\dfrac{x-3}{4-x}} - 1} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$$
$$y = \sqrt{\frac{x-3}{4-x}} \qquad (y \ge 0)$$
$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{2}{3}y$$
$$2y^2 - 5y + 3 = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{7}{2}}$$
$$y_2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{48}{13}}$$

III.13. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-1 \le x \le 1$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{1-x^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \emptyset}$$

2. Megoldás

A két gyök alatti kifejezés egyszerre nem kisebb, mint 1, ezért az összegük 1-nél biztosan több.

III.14. $\sqrt{23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}}=5$ $\boxed{x=-7}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \le \frac{21-\sqrt{1801}}{10}$ vagy $\frac{21-\sqrt{1801}}{10} \le x$

$$\sqrt{23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}}=5 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}=2 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{5x^2-21x-68}=4-2x \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad (x \le 2)$$
$$x^2-5x-84=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-7}$$

III.15. $x\left(x+\sqrt{x}\right)=1-x\left(1+\sqrt{x}\right)$ $\boxed{x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $xx \ge 0$

$$x^2+2x\sqrt{x}+x-1=0$$
$$\left(x+\sqrt{x}\right)^2-1=0$$
$$\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x+\sqrt{x}-1\right)=0$$
$$x+\sqrt{x}+1 \ge 1 > 0$$
$$x+\sqrt{x}-1=0$$
$$y=\sqrt{x} \qquad (y \ge 0)$$
$$y^2+y-1=0$$
$$y=\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

III.16. $x=a+\sqrt{a^2+x\sqrt{x+a^2}}$ $\boxed{x_{1;2}=\frac{4a+1\pm\sqrt{4a^2+8a+1}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$x-a=\sqrt{a^2+x\sqrt{x+a^2}} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^2-2ax=x\sqrt{x+a^2} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\text{Ha } x=0 \quad \Rightarrow \quad a \le 0$$
$$x-2a=\sqrt{x+a^2} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^2-x(4a+1)+3a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=\frac{4a+1+\sqrt{4a^2+8a+1}}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{4a+1-\sqrt{4a^2+8a+1}}{2}}$$

III.17. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1$ $\boxed{x=7}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq \sqrt{24}$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} &= x-1 \qquad / \ (\ldots)^2 \\ \sqrt{x^2-24} &= x-2 \qquad / \ (\ldots)^2 \\ x^2-24 &= x^2-4x+4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=7} \end{aligned}$$

III.18. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}}$ $\boxed{x=-\frac{4}{3}a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \neq 0;\ a \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}+\frac{2}{xa} &= \sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}} \qquad / \ (\ldots)^2 \\ \frac{4}{x^3a}+\frac{4}{x^2a^2} &= \frac{1}{a^2x^2} \\ \frac{4}{x^3a} &= -\frac{3}{x^2a^2} \\ 4a &= -3x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-\frac{4}{3}a} \end{aligned}$$

III.19. $x^2+5x+4 = 5\sqrt{x^2+5x+28}$ $\boxed{x_1=-9;\ x_2=4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2+5x+28} \qquad (y \geq 0) \\ y^2-5y-24 &= 0 \\ y &= 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=-9;\ x_2=4} \end{aligned}$$

III.20. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)} = 0$ $\boxed{x_1=-4;\ x_2=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \leq -3$ vagy $0 \leq x$

$$\begin{aligned} x^2+3x-10+3\sqrt{x(x+3)} &= 0 \\ y &= \sqrt{x^2+3x} \qquad (y \geq 0) \\ y^2+3y-10 &= 0 \\ y &= 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=-4;\ x_2=1} \end{aligned}$$

III.21. $x^2 + 4x - 8\sqrt{8x} + 20 = 0$ $\boxed{x = 2}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$x^2 - 4x + 4 + 8x - 8\sqrt{8x} + 16 = 0$$
$$(x-2)^2 + \left(\sqrt{8x} - 4\right)^2 = 0$$
$$x - 2 = 0 \text{ és } \sqrt{8x} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$$

III.22. $x^2 - 3x - 6\sqrt{3x} + 18 = 0$ $\boxed{x = 3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$x^2 - 6x + 9 + 3x - 6\sqrt{3x} + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 + \left(\sqrt{3x} - 3\right)^2 = 0$$
$$x - 3 = 0 \textbf{ és } \sqrt{3x} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

III.23. $x^2 - 3x - 2\sqrt{2x} + 6 = 0$ $\boxed{x = 2}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$x^2 - 4x + 4 + x - 2\sqrt{2x} + 2 = 0$$
$$(x-2)^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2 = 0$$
$$x - 2 = 0 \textbf{ és } \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$$

III.24. $x^{10} - x^5 - 2\sqrt{x^5} + 2 = 0$ $\boxed{x = 1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$x^{10} - 2x^5 + 1 + x^5 - 2\sqrt{x^5} + 1 = 0$$
$$\left(x^{10} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x^5} - 1\right)^2 = 0$$
$$x^{10} - 1 = 0 \textbf{ és } \sqrt{x^5} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1}$$

III.25. $x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = 2,75 - \dfrac{28}{9}x$ $\boxed{x_{1;2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{298408}}{9}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \leq \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{18}$ vagy $\dfrac{-1 + \sqrt{73}}{18} \leq x$

$$y = \sqrt{9x^2 + x - 2} \qquad \geq 0$$
$$y^2 - 45y - \frac{91}{4} = 0$$
$$y = \frac{91}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{298408}}{9}}$$

III.26. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$ $\boxed{0 \le x \le 3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge -1$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=1$$
$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=1$$
$$y=\sqrt{x+1}$$
$$|y-2|+|y-1|=1$$
$$1 \le y \le 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 \le x \le 3}$$

III.27. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=3$ $\boxed{x=\frac{97}{144}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge \frac{1}{2}$

$$\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=3 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{16x^2-4}=9-8x \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad (x \le \frac{9}{8})$$
$$64x^2-16=64x^2-144x+81 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{97}{144}}$$

III.28. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$ $\boxed{x_1=-5;\ x_2=4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-5 \le x \le 4$

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{4-x}\sqrt{5+x}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=-5;\ x_2=4}$$

III.29. $\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-9 \le x \le 25$

$$\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{25-x}\sqrt{9+x}=-30 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\emptyset}$$

2. Megoldás

A két gyök alatti kifejezés közül (legalább) az egyik nagyobb, mint 4.

III.30. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4$ $\boxed{x_{1;}=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2-x+1}=7-x^2 \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad (|x|\le\sqrt{7})$$
$$\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(7-x^2\right)^2$$
$$5x^2=16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}}$$

III.31. $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+1$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+1 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2x-1=2\sqrt{x^2-x+1} \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad (x\ge\frac{1}{2})$$
$$1=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\emptyset}$$

III.32. $x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2=4\left(\sqrt{x}-1\right)$ $\boxed{x=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge 0$

$$x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2=0$$
$$\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1}$$

III.33. $x^2+2\left(x+1\right)\sqrt{x}+3x=8$ $\boxed{x=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge 0$

$$x^2+2\left(x+1\right)\sqrt{x}+3x+1=9$$
$$\left(x+\sqrt{x}+1\right)^2=9$$
$$x+\sqrt{x}+1=-3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\emptyset}$$
$$x+\sqrt{x}+1=3$$
$$\sqrt{x}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1}$$

III.34. $x^3+4x\sqrt{\left(x-1\right)^3}+3x^2-8x+4=0;\quad x\ge1$ $\boxed{x=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \ge 1$

$$\left(x-1\right)\left(x^2+4x\sqrt{x-1}+4\left(x-1\right)\right)=0$$
$$\left(x-1\right)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)^2=0$$
$$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1}$$

III.35. $x^6 - x^3 - 2x^2 - 1 = 2\left(x - x^3 + 1\right)\sqrt{x}$ $\boxed{x = \sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$x^6 + 2x^3\sqrt{x} + x = x^3 + 2x^2 + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + x + 1$$
$$\left(x^3 + \sqrt{x}\right)^2 = \left(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1\right)^2$$
$$\left(x^3 + x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1\right)\left(x^3 - x\sqrt{x} - 1\right) = 0$$
$$x^3 + x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0$$
$$y = x\sqrt{x} \qquad (y \geq 0)$$
$$y^2 - y - 1 = 0$$
$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$$

III.36. $(x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2x = 46$ $\boxed{x = 4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\left[(x+2) + \sqrt{2} - \frac{3}{2}\right]^2 = \frac{169}{4}$$
$$(x+2) + \sqrt{2} - \frac{3}{2} = -\frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \emptyset}$$
$$(x+2) + \sqrt{2} - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$
$$x + \sqrt{x} - 6 = 0$$
$$\sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4}$$

III.37. $2\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \left(x - 1 + \sqrt{x+1}\right)^2$ $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = 2}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x = -1;\ x \geq 1$

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 1} = (x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{x+1} + (x+1)$$
$$(x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x^2-1} - (x-1) = 0$$
$$\sqrt{x-1}\left[(x-1)\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right] = 0$$
$$\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - 1\right)\left[\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1} + 1\right) + 2\sqrt{x+1}\right] = 0$$
$$\sqrt{x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1}$$
$$\sqrt{x-1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2}$$

III.38. $x\left(x - 2\sqrt{x-1}\right) = 2\sqrt{x-1} - 3x$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 1$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 3x &= 0 \\ \left(x - \sqrt{x-1} + 1\right)^2 &= 0 \\ x - \sqrt{x-1} + 1 &= 0 \\ x + 1 &= \sqrt{x-1} \qquad / \ (\ldots)^2 \\ x^2 + x &= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \emptyset} \end{aligned}$$

III.39. $(x-1)\left[1 - x\left(1 + 2\sqrt{x}\right)\right] = x^3 - (x-1)^2\,;\ x \geq 1$ $\boxed{x = \emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\begin{aligned} -(x-1)^2 &= x^3 + 2x\sqrt{x}\,(x-1) - (x-1)^2 \\ 0 &= x^3 + 2x\sqrt{x}\,(x-1) \\ 0 &= x\sqrt{x}\left[x\sqrt{x} + 2(x-1)\right] \\ 0 &= x\sqrt{x} + 2(x-1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \emptyset} \end{aligned}$$

III.40. $2x + 1 + x\sqrt{x^2+2} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$ $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + x\sqrt{x^2+2} \\ f(x) + f(x+1) &= 0 \\ f(x) &= \text{Páratlan és szig. mon. növ.} \\ f(x) + f(-x) &= 0 \\ x + 1 &= -x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

III.41. $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$ $\boxed{x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},\ \text{ha } a \geq 1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ a \geq 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{a - \sqrt{a+x}} &= x \qquad / \ (\ldots)^2 \\ a - x^2 &= \sqrt{a+x} \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad (\sqrt{a} \geq x) \\ x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a &= 0 \\ \left[x^4 + x^2(1-2a) + \frac{1}{4} - a + a^2\right] - \left[x^2 - x + \frac{1}{4}\right] &= 0 \\ \left(x^2 + \frac{1-2a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x^2 - x - a\right)\left(x^2 + x + 1 - a\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - x - a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$$

$$x^2 + x + 1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}, \text{ ha } a \geq 1}$$

III.42. $x = a + \sqrt{a+\sqrt{x}}$ $\boxed{x = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
x - a &= \sqrt{a+\sqrt{x}} \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad x \geq 0\\
(x-a)^2 &= a + \sqrt{x}\\
f(x) &= (x-a)^2\\
f^{-1}(x) &= a + \sqrt{x}\\
a + \sqrt{x} &= x\\
x - \sqrt{x} - 1 &= 0\\
\sqrt{x} &= \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}}
\end{aligned}$$

III.43. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$ $\boxed{x = \frac{16}{25}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x - \sqrt{1-x}} &= 1 - \sqrt{x} \qquad / \ (\ldots)^2\\
x - \sqrt{1-x} &= 1 - 2\sqrt{x} + x\\
2\sqrt{x} - 1 &= \sqrt{1-x} \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad x \geq \frac{1}{4}\\
4\sqrt{x} &= 5x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{16}{25}}
\end{aligned}$$

III.44. $\sqrt{5+x+4\sqrt{x+1}} = 2 + \sqrt{x+1}$ $\boxed{x \geq -1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq -1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(2+\sqrt{x+1}\right)^2} &= 2 + \sqrt{x+1}\\
\left|2+\sqrt{x+1}\right| &= 2 + \sqrt{x+1}\\
2 + \sqrt{x+1} &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \geq -1}
\end{aligned}$$

III.45. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$ $\boxed{-1 \leq x \leq 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq -1$

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=2$$
$$\left|1+\sqrt{x+1}\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2$$
$$-1 \leq \sqrt{x+1} \leq 1$$
$$0 \leq x+1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-1 \leq x \leq 0}$$

III.46. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 2$

$$\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{x^2-(x-2)}=2-x \qquad x \leq 2$$
$$x=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\emptyset}$$

III.47. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$ $\boxed{x=3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{4}$

$$\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{4x-3}\sqrt{5x+1}=3x+3 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$11x^2-29x-12=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3}$$

III.48. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}+5$ $\boxed{x_{1,2}=\pm 4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|x| \geq 3$

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}+5 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{x^4-81}=16+5\sqrt{7}-x^2 \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad |x| \leq \sqrt{16+5\sqrt{7}}$$
$$\left(32+10\sqrt{7}\right)x^2=512+160\sqrt{7}$$
$$x^2=16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2}=\pm 4}$$

III.49. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$ $\boxed{x_1=2;\ x_2=3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \leq 1$ vagy $2 \leq x \leq 3$ vagy $4 \leq x$

Ha $x \leq 1$ $\quad \sqrt{(x-3)(x-4)} \geq \sqrt{6} > \sqrt{2}$

Ha $x \geq 4$ $\quad \sqrt{(x-1)(x-2)} \geq \sqrt{6} > \sqrt{2}$

Tehát $2 \leq x \leq 3$

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=-x^2+5x-6$$
$$\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=-(x-2)(x-3) \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=(x-2)^2(x-3)^2$$
$$(x-2)(x-3)[(x-1)(x-4)-(x-2)(x-3)]=0$$
$$-2(x-2)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=2} \quad \boxed{x_2=3}$$

III.50. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ $\boxed{x=4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{(2x^2+3x+5)(2x^2-3x+5)}=5x^2-10 \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad x \geq \sqrt{2}$$
$$4\left[\left(2x^2+5\right)^2-9x^2\right]=\left(5x^2-10\right)^2$$
$$0=x^4-16x^2$$
$$0=x^2\left(x^2-16\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=4}$$

III.51. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq -3$

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{x+5}\sqrt{x+3}=-1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{x}=\emptyset}$$

2. Megoldás

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x+8} > \sqrt{2x+7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{x}=\emptyset}$$

III.52. $\sqrt{x\left(1+\sqrt{x}\right)}-\sqrt{x(1+x)}=\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sqrt{x}}$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1+x}\right)=0$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{1+x} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{x}=x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=0} \quad \boxed{x_2=1}$$

III.53. $\left(1-\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)\sqrt{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}$ $\boxed{x=0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$y = \sqrt{\sqrt{x}+1} \qquad y \geq 0$$
$$(1-y)\,y = y^2 - 1$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{x=0}}$$

2. Megoldás

$$\sqrt{\sqrt{x}+1} \geq 1$$
$$1 - \sqrt{\sqrt{x}+1} \leq 0$$
$$\sqrt{x} \geq 0$$
$$\sqrt{\sqrt{x}+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{x=0}}$$

III.54. $(1+x)\sqrt{1+x} - (1-x)\sqrt{1-x} = x$ $\boxed{x = 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-1 \leq x \leq 1$

$$\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - \left(\sqrt{1-x}\right)^3 = x$$
$$a = \sqrt{1+x}$$
$$b = \sqrt{1-x}$$
$$a^2 + b^2 = 2$$
$$a^3 - b^3 = X = \frac{a^2 - b^2}{2}$$
$$\text{Ha } a = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$
$$\text{Ha } a \neq \qquad b$$
$$a^2 + ab + b^2 = \frac{a+b}{2}$$
$$4 + 2ab = a + b \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$4a^2b^2 + 14ab + 14 = 0$$
$$\left(2ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\emptyset}$$

III.55. $2\,(x-1) = \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)$ $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{25}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Ha } \sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1}$$
$$\text{Ha } x \neq 1$$
$$2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) = \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)$$

$$2\left(\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{2-x}+1\right)$$

$$2\sqrt{x}+1=\sqrt{2-x} \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$5x+4\sqrt{x}-1=0$$

$$\sqrt{x}=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=\frac{1}{25}}$$

III.56. $\frac{1}{4}x=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)$ $\boxed{x=0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-1 \leq x \leq 1$

$$\frac{1}{4}x=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1}\left(\sqrt{1-x}+1\right)$$

$$\frac{1}{4}x=x\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\text{Ha } x=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0}$$

$$\text{Ha } x\neq 0$$

$$\sqrt{1+x}+1=4\left(\sqrt{1-x}+1\right)$$

$$\sqrt{1+x}=4\sqrt{1-x}+3$$

$$\sqrt{2}\geq\sqrt{1+x}=4\sqrt{1-x}+3\geq 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\emptyset}$$

III.57. $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x}=3$ $\boxed{x=\frac{1}{4}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$x+(x+2)+1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+2}+2\sqrt{(x+2)x}=2\cdot 3+3$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+1)^2=3^2$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=2$$

$$\sqrt{x+2}=2-\sqrt{x} \qquad / \ (\ldots)^2 \qquad x\leq 4$$

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{x}=\frac{1}{4}}$$

III.58. $bx\sqrt{a+x}+ab\sqrt{a+x}=a\sqrt{x^3}$ $\boxed{a=b=0;\ \forall x\in\mathbb{R}}$

$\boxed{ab=0;\ a\neq b;\ x=0}$ $\boxed{a\neq b;\ ab\neq 0;\ x=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\textbf{Ha } a=b=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$$

$$\text{Ha } a=0;\ b\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0}$$

$$\text{Ha } b=0;\ a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0}$$

$$\text{Ha } a=b\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\emptyset}$$

$$\text{Ha } a \neq b;\ ab \neq 0$$

$$b\sqrt{a+x}(a+x) = a\sqrt{x^3}$$

$$b\left(\sqrt{a+x}\right)^3 = a\left(\sqrt{x}\right)^3 \qquad / \ (\ldots)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{x}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a+x}{x} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$\frac{a}{x} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = a\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}}$$

III.59. $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{5-2x}$ $\boxed{x_1 = 2;\ x_2 = 3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $2 \leq x \leq 3;\ x \neq \frac{5}{2}$

$$\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}} = \frac{1}{5-2x} = \frac{1}{(3-x)-(x-2)}$$

$$\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}\right)}$$

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2} = \frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}$$

$$\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}\right)^2 = 1$$

$$2\sqrt{3-x}\sqrt{x-2} = 0$$

$$3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 3}$$

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2}$$

III.60. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} = 4 + \dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\boxed{x = 81}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ x \geq 0$

$$\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$\sqrt{x} - 1 = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$\sqrt{x} = 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 81}$$

III.61. $1 + \sqrt{1 - \dfrac{a}{x}} = \sqrt{1 + \dfrac{x}{a}}$ $\boxed{x_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-1 \leq \dfrac{a}{x} \leq 1$

$$1 = \sqrt{1 + \frac{x}{a}} - \sqrt{1 - \frac{a}{x}} \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$1 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$x^2 = \frac{4}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}a}$$

III.62. $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{2 - x} = \sqrt{\dfrac{1}{2 - x}}$ $\boxed{x = 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $0 \leq x < 2$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$$

$$\sqrt{2 - x} = \sqrt{2} + \sqrt{x} \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$0 = 2x + 2\sqrt{2}\sqrt{x}$$

$$0 = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$

III.63. $\dfrac{1}{\sqrt{3x + 10}} + \dfrac{16}{(x + 2)(3x + 10)} = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ $\boxed{x = 2}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x > -2$

$$\frac{16}{(x + 2)(3x + 10)} = \frac{1}{\sqrt{x + 2}} - \frac{1}{\sqrt{3x + 10}}$$

$$\frac{16}{(x + 2)(3x + 10)} = \frac{\sqrt{3x + 10} - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 2}\sqrt{3x + 10}}?$$

$$\frac{16}{\sqrt{x + 2}\sqrt{3x + 10}} = \sqrt{3x + 10} - \sqrt{x + 2}$$

$$+\frac{16}{\sqrt{x + 2}\sqrt{3x + 10}} = \frac{2x + 8}{\sqrt{3x + 10} + \sqrt{x + 2}}$$

$$\frac{\sqrt{3x + 10} + \sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 2}\sqrt{3x + 10}} = \frac{x + 4}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3x + 10}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2}} = \frac{x + 4}{8}$$

A bal oldal csökkenő, a jobb oldal növekvő $\Rightarrow$ 1 megoldás $\Rightarrow$ $\boxed{x = 2}$

III.64. a) $\sqrt{x - a} - \sqrt{\dfrac{a^2}{a + x}} = \sqrt{2a + x}$ $\boxed{a = 0;\ \forall x \geq 0x}$

b) $\sqrt{x - a} - \sqrt{\dfrac{a^2}{a + x}} = \sqrt{a + x}$ $\boxed{a = 0;\ \forall x \geq 0; a \neq 0;\ x = -\frac{5}{4}a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq a;\ x > -a$

$$\text{Ha } a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall x \geq 0}$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=a+\sqrt{2a+x}\sqrt{x+a} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^2-a^2=a^2+2\sqrt{(x+2a)(x+a)}+(x+2a)(x+a)$$
$$5x^2+12ax+8a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\emptyset}$$

b) $\sqrt{x-a}-\sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}}=\sqrt{a+x}; \qquad x\geq a;\ x>-a$

$$\text{Ha } a=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall x\geq 0}$$
$$\sqrt{x^2-a^2}=a+\sqrt{a+x}\sqrt{x+a}=x+2a$$
$$x^2-a^2=x^2+4ax+4a^2$$
$$5a^2+4ax=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-\frac{5}{4}a}$$

III.65. $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\dfrac{x}{a}$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\neq 0;\ x\geq 2a;\ x\geq -2a$

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{a}+2}-\sqrt{\frac{x}{a}-2}}{\sqrt{\frac{x}{a}-2}+\sqrt{\frac{x}{a}+2}}=\frac{x}{a}$$
$$t=\frac{x}{a}$$
$$\frac{\sqrt{t+2}-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+\sqrt{t+2}}=t$$
$$\sqrt{t+2}-\sqrt{t-2}=t\left(\sqrt{t-2}+\sqrt{t+2}\right)$$
$$(1-t)\sqrt{t+2}=(t+1)\sqrt{t-2}$$
$$(t^2-2t+1)(t+2)=(t^2+2t+1)(t-2)$$
$$2=-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-}$$

III.66. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}+1=0$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4a-2b}{2a^2b}}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\neq 0;\ x\neq \frac{1}{b};\ x\neq -\frac{1}{a};\ ab\neq 0$

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=-\frac{1+ax}{1-ax}$$
$$(1-ax)\sqrt{1+bx}=(1+ax)\sqrt{1-bx}$$
$$(a^2x^2-2ax+1)(1+bx)=(a^2x^2+2ax+1)(1-bx)$$
$$2a^2bx^3-4ax+2bx=0$$
$$x(2a^2bx^2-4a+2b)=0$$
$$2a^2bx^2=4a-2b$$

$$x^2 = \frac{4a-2b}{2a^2b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4a-2b}{2a^2b}}}$$

III.67. a) $\dfrac{x\left(\sqrt{x-1}\right)^3\sqrt{x}-1}{x-(\sqrt{x}+1)} - \dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+x-1}{x-(\sqrt{x}-1)} = 2$ $\boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$

b) $\dfrac{x\left(\sqrt{x}-1\right)^3\sqrt{x}-1}{x-(\sqrt{x}+1)} - \dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+x-1}{x-(\sqrt{x}-1)} = 2$ $\boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 1$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3-1}{x-\sqrt{x}-1} - \frac{(x-\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}-1)}{x-\sqrt{x}+1} = 2$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3-1}{x-\sqrt{x}-1} - (x-\sqrt{x}-1) = 2$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3-1}{x-\sqrt{x}-1} = x-\sqrt{x}+1$$

$$\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3-1 = (x-\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)$$

$$\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3-1 = (x-\sqrt{x})^2-1$$

$$(x^2-x)^3 = (x-\sqrt{x})^4$$

$$x^3(x-1)^3 = x^2(\sqrt{x}-1)^4$$

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0}$$

$$x(x-1)^3 = (\sqrt{x}-1)^4$$

$$\sqrt{x}-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 1}$$

$$x(\sqrt{x}+1)^3 = \sqrt{x}-1$$

Bal oldal nagyobb, mint a jobb! Ugyanis, ha $x \geq 1$

$$x\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \geq \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \geq \sqrt{x}+1 > \sqrt{x}-1$$

b) $\dfrac{x\left(\sqrt{x}-1\right)^3\sqrt{x}-1}{x-(\sqrt{x}+1)} - \dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+x-1}{x-(\sqrt{x}-1)} = 2;\quad x \geq 0$

$$\frac{(x-\sqrt{x})^3-1}{x-\sqrt{x}-1} - \frac{(x-\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}-1)}{x-\sqrt{x}+1} = 2$$

$$\left(x-\sqrt{x}\right)^2 + \left(x-\sqrt{x}\right) + 1 - (x-\sqrt{x}-1) = 2$$

$$\left(x-\sqrt{x}\right)^2 + x - \sqrt{x} + 1 - x + \sqrt{x} + 1 = 2$$

$$\left(x-\sqrt{x}\right)^2 = 0$$

$$x-\sqrt{x} = ?$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$$

III.68. $\dfrac{a\,(x+a)+a\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}+a} = \sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{x}$ $\boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$; $|x| \geq |a|$

$$\frac{a\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)}{\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right)} = \sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{x}$$
$$\frac{a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{x}$$
$$\frac{a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)^2}{2a} = \sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)^2 = 2\sqrt{x^2-a^2}+2x\sqrt{x}$$
$$2x+2\sqrt{x^2-a^2} = 2\sqrt{x^2-a^2}+2x\sqrt{x}$$
$$x = x\sqrt{x}$$
$$x\left(1-\sqrt{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$$

III.69. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = 2$ $\boxed{x = 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = 1$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x} = \sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{1-\sqrt{x}} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$1+\sqrt{x} = 1-\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$

III.70. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}} = 5$ $\boxed{x_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{1369}}{10}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1+\sqrt{\dfrac{x^2-x-4}{x^2+x+6}}}{1-\sqrt{\dfrac{x^2-x-4}{x^2+x+6}}} = 5$$
$$t = \sqrt{\frac{x^2-x-4}{x^2+x+6}}$$
$$\frac{1+t}{1-t} = 5$$
$$t = \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{x^2-x-4}{x^2+x+6}}$$

$$5x^2 - 13x - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{1369}}{10}}$$

III.71. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}+1} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1} = 1$ $\boxed{x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-1 \leq x \leq 1$

$$\frac{x\left(\sqrt{1-x}-1\right)}{-x} + \frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x} = 1$$
$$-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1+x}+1 = 1$$
$$1+\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \qquad (\ldots)^2$$
$$2\sqrt{1+x} = -1-2x \qquad (\ldots)^2$$
$$4x+4 = 4x^2+4x+1$$
$$4x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

III.72. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$ $\boxed{x = \frac{25}{16}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x > 0$

$$\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}}$$
$$\sqrt{\sqrt{x}+1} - \sqrt{\sqrt{x}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}$$
$$\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}$$
$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}+\sqrt{x-1} \qquad (\ldots)^2$$
$$x = x-1+\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}$$
$$\sqrt{x-1} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{25}{16}}$$

III.73. $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}} = \dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}$ $\boxed{x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \neq 0;\ a \geq 0;\ -a \leq x \leq a$

$$\sqrt{a}\sqrt{a+x} - \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a}\sqrt{a-x} + \sqrt{a^2-x^2}$$
$$\sqrt{a}\sqrt{a+x} - \sqrt{a}\sqrt{a-x} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2} = 4a^2 - 4x^2$$
$$a^2\left(a^2 - x^2\right) = a^4 - 4a^2x^2 + 4x^4$$
$$4x^4 - 3a^2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

III.74. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 4\sqrt{x^2-1}$ $\boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|x| \geq 1$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{2} = 4\sqrt{x^2-1}$$
$$\frac{2x^2+2\sqrt{x^4-1}}{2} + \frac{2x^2-2\sqrt{x^4-1}}{2} = 4\sqrt{x^2-1}$$
$$x^2 = 2\sqrt{x^2-1} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^4 = 4x^2 - 4$$
$$x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{2}}$$

III.75. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x}$ $\boxed{x_1 = 1;\ x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \neq 0$; $x \geq 1$ vagy $-1 \leq x < 0$

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x-1}{x} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1}$$
$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}$$
$$\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x} \qquad (\ldots)^2$$
$$x^2 + x = x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} + x$$
$$x^2 - x + 1 = 2\sqrt{x(x-1)} \qquad (\ldots)^2$$
$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 4x$$
$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$
$$x - \frac{1}{x} = a$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$$
$$a^2 + 2 - 2a + 1 = 0$$
$$(a-1)^2 = 0$$
$$a = 1$$
$$x - \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

III.76. $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}} + \dfrac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}} = \sqrt{a}$ $\boxed{x = 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $a \geq 0$; $-a \leq x \leq a$

$$\text{Ha } a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \emptyset$$

$$\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\sqrt{1-\frac{x}{a}}} + \frac{1+\frac{x}{a}}{1+\sqrt{1+\frac{x}{a}}} = 1$$

$$t = \frac{x}{a}$$

$$\frac{1-t}{1+\sqrt{1-t}} + \frac{1+t}{1+\sqrt{1+t}} = 1$$

$$\frac{(1-t)(1-\sqrt{1-t})}{t} + \frac{(1+t)(1-\sqrt{1+t})}{-t} = 1$$

$$(1-t)(1-\sqrt{1-t}) - (1+t)(1-\sqrt{1+t} = t$$

$$(t+1)\sqrt{1+t} - (1-t)\sqrt{1-t} = 3t$$

$$\left(\sqrt{1+t}\right)^3 - \left(\sqrt{1-t}\right)^3 = \frac{3}{2}\left[\left(\sqrt{1+t}\right)^2 - \left(\sqrt{1-t}\right)^2\right]$$

$$\left(\sqrt{1+t}\right)^2 + \sqrt{1+t}\sqrt{1-t} + \left(\sqrt{1-t}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}\right)$$

$$2 + \sqrt{1-t^2} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}\right)$$

$$4 + 2\sqrt{1-t^2} = 3\left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}\right) \qquad (\ldots)^2$$

$$16 + 16\sqrt{1-t^2} + 4\left(1-t^2\right) = 9(2 + 2\sqrt{1-t^2})$$

$$4\left(1-t^2\right) - 2\sqrt{1-t^2} - 2 = 0$$

$$2\left(\sqrt{1-t^2} - 1\right)\left(2\sqrt{1-t^2} + 1\right) = 0$$

$$\sqrt{1-t^2} = 1$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$

III.77. $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}} = a^3\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$ $\boxed{a = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{2}{\left(\dfrac{a+1}{1-a}\right)^2 - 1}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\frac{2+2x-2\sqrt{2x+x^2}}{2+2x+2\sqrt{2x+x^2}} = a^3\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)^2} = a^3\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)^3}=a^3$$

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=a$$

Ha $a=0 \Leftrightarrow x_1=0$

$$\frac{\sqrt{\frac{2+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{2+x}{x}}+1}=a$$

$$\sqrt{\frac{2+x}{x}}=\frac{a+1}{1-a} \qquad (\ldots)^2$$

$$1+\frac{2}{x}=\left(\frac{a+1}{1-a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=\frac{2}{\left(\frac{a+1}{1-a}\right)^2-1}}$$

III.78. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2$ $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|x|\geq\sqrt[4]{12}$

$$\frac{\left(12-\frac{12}{x^2}\right)-\left(x^2-\frac{12}{x^2}\right)}{\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}}=x^2$$

$$\frac{12-x^2}{\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}}=x^2$$

$$\frac{12}{x^2}-1=\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}$$

$$x^2=\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}$$

$$x^2-\frac{12}{x^2}+1=2\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}$$

$$x^2-\frac{12}{x^2}-2\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}+1=0$$

$$\left(\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}-1\right)^2=0$$

$$\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=1 \qquad (\ldots)^2$$

$$x^4-x^2-12=0$$

$$x^2=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2}=\pm 2}$$

III.79. $x-10+6\sqrt{\frac{x-10}{x+5}}-\frac{40}{x+5}=0$ $\boxed{x_1=-10;\ x_2=11}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x < -5$ vagy $10 \leq x$
I. eset: $x < -5$

$$x - 10 + 6\sqrt{\frac{x-10}{x+5}} - \frac{40}{x+5} = 0$$

$$10 - x - 6\sqrt{\frac{10-x}{-x-5}} - \frac{40}{-x-5} = 0$$

$$\left(\sqrt{10-x} - \frac{3}{\sqrt{-x-5}}\right)^2 - \frac{49}{-x-5} = 0$$

$$\left(\sqrt{10-x} - \frac{3}{\sqrt{-x-5}}\right)^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{-x-5}}\right)^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{10-x} - \frac{10}{\sqrt{-x-5}}\right)\left(\sqrt{10-x} + \frac{4}{\sqrt{-x-5}}\right) = 0$$

$$\sqrt{10-x} - \frac{10}{\sqrt{-x-5}} = 0$$

$$\sqrt{10-x}\sqrt{-x-5} = 10 \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$(10-x)(-x-5) = 100$$

$$x^2 - 5x - 150 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -10}$$

II. eset: $10 \leq x$

$$x - 10 + 6\sqrt{\frac{x-10}{x+5}} - \frac{40}{x+5} = 0$$

$$\left(\sqrt{x-10} + \frac{3}{\sqrt{x+5}}\right)^2 - \frac{49}{x+5} = 0$$

$$\left(\sqrt{x-10} + \frac{3}{\sqrt{x+5}}\right)^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{x+5}}\right)^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{x-10} + \frac{10}{\sqrt{x+5}}\right)\left(\sqrt{x-10} - \frac{4}{\sqrt{x+5}}\right) = 0$$

$$\sqrt{x-10} - \frac{4}{\sqrt{x+5}} = 0$$

$$\sqrt{x-10}\sqrt{x+5} = 4 \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$(x-10)(x+5) = 16$$

$$x^2 - 5x - 66 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 11}$$

2. Megoldás

$$6\sqrt{\frac{x-10}{x+5}} = \frac{40}{x+5} + 10 - x$$

$$6(x+5)\sqrt{\frac{x-10}{x+5}} = 40 + (10-x)(x+5) \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$36(x-10)(x+5) = [40 + (x+5)(10-x)]^2$$

$$x^4 - 10x^3 - 191x^2 + 1080x + 9000 = 0$$

$$\left(x^2-5x-108\right)^2-42^2=0$$
$$\left(x^2-5x-150\right)\left(x^2-5x-66\right)=0$$
$$x^2-5x-150=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=-10}$$
$$x^2-5x-66=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2=11}$$

3. Megoldás

$$6\sqrt{\frac{x-10}{x+5}}=\frac{40}{x+5}+10-x$$
$$6(x+5)\sqrt{\frac{x-10}{x+5}}=40+(10-x)(x+5) \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$36(x-10)(x+5)=[40+(x+5)(10-x)]^2$$
$$t=(x-10)(x+5)$$
$$36t=(40-t)^2$$
$$0=t^2-116t+1600$$
$$t_1=100 \quad\Rightarrow\quad x^2-5x-50=100 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=-10}$$
$$t_2=16 \quad\Rightarrow\quad x^2-5x-50=16 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2=11}$$

III.80. $x+25-52\sqrt{\frac{x+25}{x-17}}-\frac{1440}{x-17}=0$ $\boxed{x_1=-33;\ x_2=71}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\le -25$ vagy $17<x$

I. eset: $x\le -25$

$$x+25-52\sqrt{\frac{x+25}{x-17}}-\frac{1440}{x-17}=0$$
$$-x-25+52\sqrt{\frac{-x-25}{17-x}}-\frac{1440}{17-x}=0$$
$$\left(\sqrt{-x-25}+\frac{26}{\sqrt{17-x}}\right)^2-\frac{2116}{17-x}=0$$
$$\left(\sqrt{-x-25}+\frac{26}{\sqrt{17-x}}\right)^2-\left(\frac{46}{\sqrt{17-x}}\right)^2=0$$
$$\left(\sqrt{-x-25}-\frac{20}{\sqrt{17-x}}\right)\left(\sqrt{-x-25}+\frac{72}{\sqrt{17-x}}\right)=0$$
$$\sqrt{-x-25}-\frac{20}{\sqrt{17-x}}=0$$
$$\sqrt{-x-25}\sqrt{17-x}=20 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$(-x-25)(17-x)=400$$
$$x^2+8x-825=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=-33}$$

II. eset: $17<x$

$$x+25-52\sqrt{\frac{x+25}{x-17}}-\frac{1440}{x-17}=0$$

$$\left(\sqrt{x+25}-\frac{26}{\sqrt{x-17}}\right)^2-\frac{2116}{x-17}=0$$
$$\left(\sqrt{x+25}-\frac{26}{\sqrt{x-17}}\right)^2-\left(\frac{46}{\sqrt{x-17}}\right)^2=0$$
$$\left(\sqrt{x+25}-\frac{72}{\sqrt{x-17}}\right)\left(\sqrt{x+25}+\frac{20}{\sqrt{x-17}}\right)=0$$
$$\sqrt{x+25}-\frac{72}{\sqrt{x-17}}=0$$
$$\sqrt{x+25}\sqrt{x-17}=72 \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$(x+25)(x-17)=5184$$
$$x^2+8x-5609=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=71}$$

2. Megoldás

$$x+25-\frac{1440}{x-17}=52\sqrt{\frac{x+25}{x-17}}$$
$$(x+25)(x-17)-1440=52(x-17)\sqrt{\frac{x+25}{x-17}} \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$[(x+25)(x-17)-1440]^2=2704(x-17)(x+25)$$
$$x^4+16x^3-3718x^2-30256x+3500325=0$$
$$\left(x^2+8x-3217\right)^2-2392^2=0$$
$$\left(x^2+8x-825\right)\left(x^2+8x-5609\right)=0$$
$$x^2+8x-825=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=-33}$$
$$x^2+8x-5609=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=71}$$

3. Megoldás

$$x+25-\frac{1440}{x-17}=52\sqrt{\frac{x+25}{x-17}}$$
$$(x+25)(x-17)-1440=52(x-17)\sqrt{\frac{x+25}{x-17}} \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$[(x+25)(x-17)-1440]^2=2704(x-17)(x+25)$$
$$t=(x+25)(x-17)$$
$$(t-1440)^2=2704t$$
$$t^2-5584t+2073600=0$$
$$t_1=-5584 \quad \Rightarrow \quad x^2+8x-825=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=-33}$$
$$t_2=-400 \quad \Rightarrow \quad x^2+8x-5609=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=71}$$

III.81. $\sqrt{x+27}-\sqrt{x-13}=\sqrt{x-6}$ $\boxed{x=22}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 13$

$$\sqrt{x+27} = \sqrt{x-6} + \sqrt{x-13} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$46 - x = 2\sqrt{x-6}\sqrt{x-13} \qquad x \leq 45 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$0 = 3x^2 + 16x - 1804 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 22}$$

III.82. $x^2 - 4 = \sqrt{x+4}$ $\boxed{x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-4 \leq x \leq -2$ vagy $2 \leq x$

$$x^2 - 4 = \sqrt{x+4}$$
$$(x+4)^2 - 8(x+4) + 12 = \sqrt{x+4}$$
$$(x+4)^2 - 7(x+4) + \frac{49}{4} = (x+4) + \sqrt{x+4} + \frac{1}{4}$$
$$\left(x+4-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x+4-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$\left(x+4-\frac{7}{2}+\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\right)\left(x+4-\frac{7}{2}-\sqrt{x+4}-\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\left(x+\sqrt{x+4}+1\right)\left(x-\sqrt{x+4}\right) = 0$$
$$\text{I. eset } x+\sqrt{x+4}+1 = 0$$
$$\sqrt{x+4} = -x-1$$
$$x^2 + x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}}$$
$$\text{II. eset } x-\sqrt{x+4} = 0$$
$$x = \sqrt{x+4} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^2 - x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}}$$

2. Megoldás

$$x^2 - 4 = \sqrt{x+4} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^4 - 8x^2 - x + 12 = 0$$
$$\left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$\left(x^2+x-3\right)\left(x^2-x-4\right) = 0$$
$$x^2 + x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}}$$
$$x^2 - x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}}$$

III.83. $\sqrt{3x^2+2x+m}=x+2$ $\boxed{x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9-2m}}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány:

- Ha $m<-8$, akkor $\dfrac{-1+\sqrt{1-3m}}{3}\le x$
- Ha $-8\le m\le -\dfrac{1}{3}$ akkor $-2\le x\le \dfrac{-1-\sqrt{1-3m}}{3}$ vagy $\dfrac{-1+\sqrt{1-3m}}{3}\le x$
- $-\dfrac{1}{3}<m$, akkor $-2\le x$

$$\sqrt{3x^2+2x+m}=x+2 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2x^2-2x+(m-4)=0$$
$$D=36-8m\ge 0 \quad\Rightarrow\quad m\le\frac{9}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9-2m}}{2}}$$

III.84. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}=1$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\ge\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{3x+1} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$2x-1=1+2\sqrt{3x+1}+3x+1$$
$$-x-3=2\sqrt{3x+1}$$

Itt az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldal nem negatív, tehát nincs megoldás.

2. Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\ge\dfrac{1}{2}$

$$2x-1<3x-1<3x+1 \qquad\Rightarrow\qquad \sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}<0<1$$

Tehát az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldal pozitív, tehát nincs megoldás.

4.4. Köb– és magasabb gyökös egyenletek

IV.1. $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$ $\boxed{x = 7}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 3$

$$y = \sqrt{x-3} \qquad (y \geq 0)$$
$$\sqrt[3]{y^2+4} = y \qquad / \ (\dots)^3$$
$$y^3 - y^2 - 4 = 0$$
$$(y-2)(y^2+y+2) = 0$$
$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 7}$$

IV.2. $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ $\boxed{x_1 = 0;\ x_2 = \frac{63}{65}a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ha } a = \pm x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0\ (= a)}$$
$$\text{Ha } a \neq \pm x$$
$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 4\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} = 5$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$$
$$y + \frac{4}{y} = 5$$
$$y^2 - 5y + 4 = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$
$$y_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{63}{65}a}$$

IV.3. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$ $\boxed{x = 1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$y = \sqrt[6]{x} \qquad (y \geq 0)$$
$$y^2 + y - 2 = 0$$
$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1}$$

IV.4. $5\sqrt[4]{x} + 2 = 3\sqrt{x}$ $\boxed{x = 16}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$y = \sqrt[4]{x} \qquad (y \geq 0)$$
$$3y^2 - 5y - 2 = 0$$
$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 16}$$

IV.5. $2\sqrt[3]{x}+5=63\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ $\boxed{x_1=-343;\ x_2=\frac{729}{8}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\neq 0$

$$y=\sqrt[3]{x}$$
$$2y^2+5y-63=0$$
$$y_1=-7 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=-343}$$
$$y_2=\frac{9}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2=\frac{729}{8}}$$

IV.6. $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20$ $\boxed{x_{1;2}=\pm 8}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\neq 0$

$$2\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}=20$$
$$y=\sqrt[3]{x^2} \qquad (y\geq 0)$$
$$2y^2-3y-20=0$$
$$y=4 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_{1;2}=\pm 8}$$

IV.7. $a^3+2(x-a)=3a\sqrt[3]{(x-a)^2}$ $\boxed{x_1=a^3+a;\ x_2=-\frac{a^3}{8}+a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$

$$y=\sqrt[3]{(x-a)}$$
$$a^3+2y^3=3ay^2$$
$$(a-y)^2(a+2y)=0$$
$$a=y=\sqrt[3]{(x-a)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=a^3+a}$$
$$a=-2y=-2\sqrt[3]{(x-a)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2=-\frac{a^3}{8}+a}$$

IV.8. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$ $\boxed{x_1=80;\ x_2=-109}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$

$$a=\sqrt[3]{x+45}$$
$$b=\sqrt[3]{x-16} \qquad a\neq b$$
$$a-b=1$$
$$a^3-b^3=61=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^2+ab+b^2=61=(a-b)^2+3ab$$

$$ab = 20$$
$$a_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 80}$$
$$a_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -109}$$

IV.9. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$ $\boxed{x = 4416}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18} \qquad / \ (\ldots)^3$$
$$108 + 3\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{54^2 - x} = 18$$
$$\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{54^2 - x} = -30 \qquad / \ (\ldots)^3$$
$$18(54^2 - x) = -30^3$$
$$54^2 - x = -1500 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4416}$$

IV.10. $\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + 7$ $\boxed{y_1 = 0;\ x_2 = -19}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$a = \sqrt[3]{8-x}$$
$$b = \sqrt[3]{27+x}$$
$$a^3 + b^3 = 35$$
$$a^2 + b^2 = ab + 7$$
$$a^2 - ab + b^2 = 7$$
$$a^3 + b^3 = 7(a+b)$$
$$a + b = 5$$
$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab = 7$$
$$ab = 6$$
$$a_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0}$$
$$a_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -19}$$

IV.11. $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x\sqrt{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt[3]{a\sqrt{x}}} = \sqrt[4]{b}$ $\boxed{x = \left(\sqrt[6]{b} - \sqrt[6]{b}\right)^6}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ a \geq 0;\ b \geq 0$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\sqrt[6]{a}} + \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\sqrt[6]{x}} = \sqrt[4]{b}$$
$$\sqrt{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{a}\right)} + \sqrt{\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{x}\right)} = \sqrt[4]{b}$$
$$\sqrt{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{a}\left(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{a}\right)} = \sqrt[4]{b}$$
$$\sqrt{\left(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{a}\right)^3} = \sqrt[4]{b} \qquad / \ (\ldots)^4$$

$$\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{a}\right)^6 = b$$

$$\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{b} - \sqrt[6]{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \left(\sqrt[6]{b} - \sqrt[6]{a}\right)^6}$$

IV.12. $\sqrt[3]{(a+x)^2} - \sqrt[3]{a^2-x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2} = b$ $\boxed{{}_{1,2} = \frac{a}{b} \pm \frac{b^3-a^2}{3b^2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a+x} &= c\\
\sqrt[3]{a-x} &= d\\
c^3+d^3 &= 2a\\
(c+d)(c^2-cd+d^2) &= b(c+d)\\
c^3+d^3 &= b(c+d)\\
c+d &= \frac{2a}{b}\\
c^2-cd+d^2 = b &= (c+d)^2-3cd\\
b &= \left(\frac{2a}{b}\right)^2 - 3cd\\
cd &= \frac{4c^2-d^3}{3d^2}\\
t^2 - \left(\frac{2c}{d}\right) + \frac{4c^2-d^3}{3d^2} &= 0
\end{aligned}$$

$$t_1 = \sqrt[3]{a+x} = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b^3-a^2}{3b^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -a + \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b^3-a^2}{3b^2}}\right)^3}$$

$$t_2 = \sqrt[3]{a+x} = \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{b^3-a^2}{3b^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -a + \left(\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{b^3-a^2}{3b^2}}\right)^3}$$

IV.13. $\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-x} - \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = 0$ $\boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\text{Ha } a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall x \geq 0}$$

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} \neq 0 \qquad / \ (\ldots)^3$$

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}\left(\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x}\right) = \sqrt[3]{a^2-x}\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)$$

$$\sqrt[3]{a^2-x^2} = \sqrt[3]{a^2-x}$$

$$x^2 = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0;\ x_2 = 1}$$

IV.14. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ $\boxed{x = 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2 \qquad / \ (\ldots)^3$$
$$2+3\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)=8$$
$$\sqrt[3]{1-x}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0}$$

IV.15. $\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2-x^3}}+\sqrt{1-x+\sqrt[3]{x\,(1-x)^2}}=1$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)}+\sqrt{\sqrt[3]{(1-x)^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)}=1$$
$$\sqrt[3]{x}\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)}=1$$
$$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)}=1$$
$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}\right)^3=1 \qquad / \ (\ldots)^3$$
$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}=1 \qquad / \ (\ldots)^3$$
$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-x}=0$$
$$\sqrt[3]{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=0}$$
$$\sqrt[3]{-1x}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=1}$$

IV.16. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=\frac{63}{65}a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ha } a^2=x^2 \qquad a=x=0$$
$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+4\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=5$$
$$b=\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$$
$$b^2-5b+4=0$$
$$b_1=1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=0}$$
$$b_2=4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=\frac{63}{65}a}$$

IV.17. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{a^2-x^2}$ $\boxed{\emptyset}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ha } a^2=x^2 \qquad a=x=0$$

$$\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[6]{a^2-x^2} + \sqrt[3]{a-x} = 0$$
$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} = 1$$
$$b = \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$$
$$b^2 - b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\emptyset}$$

IV.18. $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4a^2}} + \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}} = b$ $\boxed{x = \left(\sqrt{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}}\right)^3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|a| \geq b \geq 0$

$$\sqrt{x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)} + \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)} = b$$
$$\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} = b$$
$$\left(\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = b$$
$$x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \left(\sqrt{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}}\right)^3}$$

IV.19. $\sqrt[3]{(1+x)^2} - \left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right)\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1+x}} = 1$

$\boxed{x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2;\ x_4 = -9}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$a = \sqrt[3]{1+x}$$
$$a^2 - (a-1)\sqrt[3]{1+a} = 1$$
$$(a-1)\left(a + 1 - \sqrt[3]{1+a}\right) = 0$$
$$a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0}$$
$$\sqrt[3]{1+a} = a + 1 = \left(\sqrt[3]{1+a}\right)^3$$
$$\sqrt[3]{1+a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -2}$$
$$\sqrt[3]{1+a} = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_3 = -9}$$
$$\sqrt[3]{1+a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_4 = -1}$$

IV.20. $\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} = 2\sqrt[8]{a^2-x^2}$ $\boxed{x = 0}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-a \leq x \leq a$

$$\left(\sqrt[4]{a+x} - \sqrt[4]{a-x}\right)^2 = 0$$
$$\sqrt[4]{a+x} = \sqrt[4]{a-x} \qquad / \ (\ldots)^4$$
$$a + x = a - x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$

IV.21. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$ $\boxed{x_{1,2}=\frac{\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n+1}{\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n-1}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$

$$\text{Ha } x=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\text{Ellentmondás}}$$

$$\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2+1=4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$a=\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$a^2-4a+1=0$$

$$a_1=2+\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-1}}$$

$$a_2=2-\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n+1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n-1}}$$

IV.22. $\sqrt[n]{(x+a)^3}+2\sqrt[n]{x^3}=3\sqrt[n]{x^2(x+a)}$ $\boxed{x=\frac{a}{(-2)^n-1}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$

$$\text{Ha } a=0 \qquad \boxed{x=0}$$

$$\sqrt[n]{\frac{(x+a)^2}{x^2}}+2\sqrt[n]{\frac{x}{(x+a)}}=3$$

$$b=\sqrt[n]{\frac{x+a}{x}}$$

$$b^2+\frac{2}{b}=3$$

$$b^3-3b+2=0$$

$$(b-1)(b-1)(b+2)=0$$

$$b_1=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=\emptyset}$$

$$b_2=-2\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=\frac{a}{(-2)^n-1}}$$

IV.23. $(1+\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^2}+(1+\sqrt[3]{a})\sqrt[3]{a^2}=2\sqrt[3]{ax}\,(1+\sqrt[6]{ax})$ $\boxed{x=a}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{x^2}+x+\sqrt[3]{a^2}+a=2\sqrt[3]{ax}+2\sqrt{ax}$$

$$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}+x-2\sqrt{ax}+a=0$$

$$\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)^2=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=a}$$

IV.24. $\sqrt[5]{(3x-5)^3} - \sqrt[5]{(5-3x)^{-3}} = -\frac{52}{10}$

$x_1 = \frac{5-\sqrt[3]{5^5}}{3};\ x_2 = \frac{5-\sqrt[3]{\frac{1}{5^5}}}{3}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \neq \frac{5}{3}$

$$\sqrt[5]{(3x-5)^3} + \sqrt[5]{(3x-5)^{-3}} = -\frac{52}{10}$$
$$a = \sqrt[5]{(3x-5)^3}$$
$$a + \frac{1}{a} = -\frac{52}{10}$$
$$5a^2 + 26a + 5 = 0$$
$$a_1 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5-\sqrt[3]{5^5}}{3}$$
$$a_2 = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5-\sqrt[3]{\frac{1}{5^5}}}{3}$$

IV.25. $\left(\sqrt[7]{x-1} + \sqrt[7]{x+1}\right)^2 + 5\left[\sqrt[7]{(x-1)^2} - \sqrt[7]{(x+1)^2}\right] + 6\left(\sqrt[7]{x-1} - \sqrt[7]{x+1}\right)^2 = 0$

$\frac{3^7+1}{3^7-1};\ \frac{2^7+1}{2^7-1}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$a = \sqrt[7]{x-1}$$
$$b = \sqrt[7]{x+1}$$
$$(a+b)^2 + 5\left(a^2 - b^2\right) + 6(a-b)^2 = 0$$
$$6a^2 - 5ab + b^2 = 0$$
$$(3a-b)(2a-b) = 0$$
$$3a = b \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3^7+1}{3^7-1}$$
$$2a = b \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2^7+1}{2^7-1}$$

IV.26. $\left(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a}\right)^3 \left(\sqrt[4]{x+a} - \sqrt[4]{x-a}\right) = 2b$

$x_{1,2} = a + \frac{2a}{1-\left(\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^4}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq |a|$

$$\left(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a}\right)^3 \left(\sqrt[4]{x+a} - \sqrt[4]{x-a}\right) = 2b$$
$$\left(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a}\right)^2 \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}\right) = 2b$$
$$\left(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a}\right)^2 \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}\right)\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right) = 2b\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right)$$
$$\left(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a}\right)^2 2a = 2b\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right)$$
$$a\left(\sqrt{x+a} + 2\sqrt[4]{x-a}\sqrt[4]{x+a} + \sqrt{x-a}\right) = b\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right)$$

$$a\left(\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+2\sqrt[4]{\frac{x+a}{x-a}}+1\right)=b\left(\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+1\right)$$

$$(a-b)\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}+2a\sqrt[4]{\frac{x+a}{x-a}}+(a-b)=0$$

$$t=\sqrt[4]{\frac{x+a}{x-a}}$$

$$(a-b)t^2+2at+(a-b)=$$

$$t_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4(a-b)^2}}{2(a-b)}$$

$$t_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+a}{x-a}}=\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}$$

$$\frac{x+a}{x-a}=1-\frac{2a}{x-a}=\left(\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^4$$

$$1-\left(\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^4=\frac{2a}{x-a}$$

$$\frac{2a}{1-\left(\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^4}=x-a$$

$$\boxed{x_{1,2}=a+\frac{2a}{1-\left(\frac{-a\pm\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^4}}$$

IV.27. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=21\dfrac{1}{3}\sqrt[7]{x}$ $\boxed{x_1=\frac{2}{21};\ x_2=-\frac{3}{32}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$

$$\sqrt[7]{12+x}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}\right)=\frac{64}{3}\sqrt{x}$$

$$\sqrt[7]{12+x}\frac{x+12}{12x}=\frac{64}{3}\sqrt{x}$$

$$(x+12)^{\frac{8}{7}}=256\cdot x^{\frac{8}{7}}=(127x)^{\frac{8}{7}}$$

$$x+12=127x\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_1=\frac{2}{21}}$$

$$x+12=-127x\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_2=-\frac{3}{32}}$$

IV.28. $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{b}$ $\boxed{x_{1,2}=\frac{\mp a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}\pm1}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $abx\neq0$

$$\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

$$\sqrt[n]{a+x}\frac{a+x}{ax} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$
$$(a+x)^{\frac{m+1}{n}} = x^{\frac{m+1}{n}}\frac{a}{b}$$
$$a+x = x\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1 = \frac{a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}-1}}$$
$$a+x = -x\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2 = \frac{-a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}+1}}$$

IV.29. $\dfrac{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{5-x}-\sqrt[4]{x-2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{5-x}{x-2}}$ $\boxed{x = \frac{167}{82}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $2 < x \leq 5$

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}}+1}{\sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}}-1} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}}$$
$$a = \sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}}$$
$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{3}a$$
$$0 = 2a^2 - 5a - 3$$
$$a = 3 = \sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x = \frac{167}{82}}$$

IV.30. $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}} + \sqrt[n]{\dfrac{b+x}{a-x}} = 2$ $\boxed{x = \frac{a-b}{2}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \neq -a$; $x \neq b$

$$t = \sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}$$
$$f + \frac{1}{t} = 1$$
$$t = 1$$
$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} = 1$$
$$\frac{a-x}{b+x} = 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x = \frac{a-b}{2}}$$

IV.31. $\dfrac{\sqrt[m]{1+x^2}+\sqrt[m]{1-x^2}}{\sqrt[m]{1+x^2}-\sqrt[m]{1-x^2}} = \dfrac{p}{q}$ $\boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{(p+q)^m-(p-q)^m}{(p+q)^m+(p-q)^m}}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q\sqrt[m]{1+x^2}+q\sqrt[m]{1-x^2} &= p\sqrt[m]{1+x^2}-p\sqrt[m]{1-x^2} \\ (p+q)\sqrt[m]{1-x^2} &= (p-q)\sqrt[m]{1+x^2} \\ (p+q)^m\left(1-x^2\right) &= (p-q)^m\left(1+x^2\right) \\ (p+q)^m-(p-q)^m &= x^2\left[(p+q)^m+(p-q)^m\right] \\ x^2 &= \frac{(p+q)^m-(p-q)^m}{(p+q)^m+(p-q)^m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{(p+q)^m-(p-q)^m}{(p+q)^m+(p-q)^m}}} \end{aligned}$$

4.5. Négyzetgyökös egyenlőtlenségek

V.1. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$

$$\boxed{-1\le x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}}$$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-1\le x\le 3$

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}\qquad /\ (\ldots)^2$$
$$\frac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1}\qquad x<\frac{7}{8}\qquad /\ (\ldots)^2$$
$$4x^2-8x+\frac{33}{16}>0$$
$$x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}\ \text{vagy}\ \frac{8+\sqrt{31}}{8}<x\quad\Rightarrow\quad\boxed{-1\le x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}}$$

V.2. $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$

$$\boxed{-\frac{9}{2}\le x<\frac{45}{8};\ x\ne 0}$$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x\ge-\frac{9}{2};\ x\ne 0$

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$
$$\frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$
$$\frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{4x^2}<2x+9$$
$$\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2<2x+9$$
$$2\sqrt{1+2x}<7$$
$$x<\frac{45}{8}\quad\Rightarrow\quad\boxed{-\frac{9}{2}\le x<\frac{45}{8};\ x\ne 0}$$

V.3. $\sqrt{3-2x-x^2}>x+2$

$$\boxed{-2\le x<\frac{-3+\sqrt{7}}{2}}$$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $-2\le x\le 1$

$$\sqrt{3-2x-x^2}>x+2\qquad /\ (\ldots)^2$$
$$0>2x^2+6x+1$$
$$\frac{-3-\sqrt{7}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{-2\le x<\frac{-3+\sqrt{7}}{2}}$$

V.4. $\sqrt{9x+7} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 3\sqrt{x+1}; \quad x \geq \frac{1}{2}$ [Igaz az állítás]

Megoldás

Nézzük a jobb oldali egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 3\sqrt{x+1}$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} < 2\sqrt{x+1} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\sqrt{x}\sqrt{x+2} < x+1 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Ekvivalens átalakítások...}}$$

Nézzük a bal oldali egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{9x+7} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$
$$3\sqrt{x+\frac{7}{9}} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$
$$\text{Mivel } \sqrt{x+\frac{7}{9}} < \sqrt{x+1}$$
$$\text{ezért elég } 2\sqrt{x+\frac{7}{9}} < \sqrt{x} + \sqrt{x+2} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x+\frac{5}{9} < \sqrt{x(x+2)} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$\frac{25}{72} < x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Ekvivalens átalakítások...}}$$

4.6. Gyökös egyenletrendszerek, 2 ismeretlen

VI.1. $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{5}{3}; \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+6}} = 2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$ $\boxed{M\,(16;\ 30)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x > 7;\ y > -6$

$$a = \frac{1}{\sqrt{x-7}} \qquad (> 0)$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{y+6}} \qquad (> 0)$$
$$\begin{cases} 7a - 4b = \dfrac{5}{3}; \\ 5a + 3b = 2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$
$$a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 16}$$
$$b = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 30}$$

VI.2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3; \\ xy = 4. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(1;\ 4)\,;\ M_2\,(4;\ 1)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ y \geq 0$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3; \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x + y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - x$$
$$x(5-x) = 4$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;4)}$$
$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(4;1)}$$

2. Megoldás

$$xy = 4$$
$$\sqrt{x}\sqrt{y} = 2$$
$$\sqrt{y} = 3 - \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x}\left(3 - \sqrt{x}\right) = 2$$
$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$$
$$\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;4)}$$
$$\sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(4;1)}$$

VI.3. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(1;\;8)\,;\;M_2\,(8;\;1)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x; y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} xy &= 8 \\ \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} &= 2 \\ \sqrt[3]{y} &= 3-\sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x}\left(3-\sqrt[3]{x}\right) &= 2 \\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^2-3\sqrt[3]{x}+2 &= 0 \\ \sqrt[3]{x} &= 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;8)} \\ \sqrt[3]{x} &= 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(8;1)} \end{aligned}$$

2. Megoldás

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} &= 3 \qquad\qquad / \;(\ldots)^3 \\ x+y+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right) &= 27 \\ x+y &= 9 \qquad \Rightarrow \qquad y=9-x \\ x\,(9-x) &= 8 \\ x^2-9x+8 &= 0 \\ x &= 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;8)} \\ x &= 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(8;1)} \end{aligned}$$

VI.4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(-1;\;-27)\,;\;M_2\,(27;\;1)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x; y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} &= 3 \\ \sqrt[3]{y} &= \sqrt[3]{x}-2 \\ \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-2\right) &= 3 \\ (\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}-3 &= 0 \\ \sqrt[3]{x} &= -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(-1;-27)} \\ \sqrt[3]{x} &= 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(27;1)} \end{aligned}$$

2. Megoldás

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y} &= 2 \qquad\qquad / \;(\ldots)^3 \\ x-y-3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right) &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 26 \\ y &= x - 26 \\ x(x-26) &= 27 \\ x^2 - 26x - 27 &= 0 \\ x &= -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(-1;-27)} \\ x &= 27 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(27;1)} \end{aligned}$$

VI.5. $\begin{cases} x = 6\sqrt{x+y}, \\ y = 2\sqrt{x+y}. \end{cases}$ $\boxed{M_1(0;\ 0);\ M_2(48;\ 16)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ y \geq 0$

$$\begin{aligned} x = 6\sqrt{x+y} &= 3 \cdot 2\sqrt{x+y} = 3y \\ x &= 3y \\ y &= 4\sqrt{y} \\ y - 4\sqrt{y} &= 0 \\ \sqrt{y}\,(\sqrt{y} - 4) &= 0 \\ \sqrt{y} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(0;0)} \\ \sqrt{y} &= 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(48;16)} \end{aligned}$$

2. Megoldás

$$\begin{aligned} x + y &= 8\sqrt{x+y} \\ x + y - 8\sqrt{x+y} &= 0 \\ \sqrt{x+y}\left(\sqrt{x+y} - 8\right) &= 0 \\ \sqrt{x+y} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(0;0)} \\ \sqrt{x+y} &= 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(48;16)} \end{aligned}$$

VI.6. $\begin{cases} \left(x^2 + xy + y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 185, \\ \left(x^2 - xy + y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 65. \end{cases}$ $\boxed{M_{1;2};(\pm 3;\ \pm 4);\ M_{3;4}(\pm 4;\ \pm 3)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\text{Ha } xy = 0 \text{ akkor ellentmondás!} \\ \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} &= \frac{185}{65} = \frac{37}{13} \\ a &= \frac{x}{y} \\ \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1} &= \frac{37}{13} \end{aligned}$$

$$12a^2 - 25a + 12 = 0$$

$$\text{Ha } a_1 = \frac{3}{4} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(3;4)} \text{ és } \boxed{M_2(-3;-4)}$$

$$\text{Ha } a_2 = \frac{4}{3} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_3(4;3)} \text{ és } \boxed{M_4(-4;-3)}$$

VI.7. $\begin{cases} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{y^3} = 35, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 5. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(16;\ 81)\,;\ M_2\,(81;\ 16)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ y \geq 0$

$$a = \sqrt[4]{x} \qquad \geq 0$$

$$b = \sqrt[4]{y} \qquad \geq 0$$

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ a + b = 5 \qquad b = 5 - a \end{cases}$$

$$a^3 + (5-a)^3 = 35$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$a_1 = 2 = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(16;81)}$$

$$a_2 = 3 = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(81;16)}$$

VI.8. $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(8;\ 2)\,;\ M_2\,(2;\ 8)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x > 0;\ y > 0$

$$a = \sqrt{\frac{x}{y}} \qquad (> 0)$$

$$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$$

$$a_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4y \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(8;2)}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 4x \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(2;8)}$$

VI.9. $\begin{cases} x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(25;\ 9)\,;\ M_2\left(\frac{49}{4};\ \frac{81}{4}\right)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ y \geq 0$

$$x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2$$
$$x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$
$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_1(25; 9)}$$
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = -1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_2\left(\frac{49}{4}; \frac{81}{4}\right)}$$

VI.10. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}} + \sqrt{\dfrac{5x}{x+y}} = \dfrac{34}{15}, \\ x + y = 12. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(\frac{20}{3}; \frac{16}{3}\right);\ M_2\left(\frac{108}{125}; \frac{1392}{125}\right)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x > 0$

$$a = \sqrt{\frac{x+y}{5x}} = \sqrt{\frac{12}{5x}} \qquad (> 0)$$
$$a + \frac{1}{a} = \frac{34}{15}$$
$$a = \frac{3}{5} = \sqrt{\frac{12}{5x}} \Rightarrow \boxed{M_1\left(\frac{20}{3}; \frac{16}{3}\right)}$$
$$a = \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{12}{5x}} \Rightarrow \boxed{M_2\left(\frac{108}{125}; \frac{1392}{125}\right)}$$

VI.11. $\begin{cases} x + y - \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$ $\boxed{M_{1;2}\left(\pm 5; \pm 3\right)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x > y > 0$

$$(x+y)(x-y) - \sqrt{(x+y)(x-y)} = 12$$
$$\left(x^2 - y^2\right) - \sqrt{x^2 - y^2} - 12 = 0$$
$$a = \sqrt{x^2 - y^2} \qquad (> 0)$$
$$a^2 - a - 12 = 0$$
$$a = 4 = \sqrt{x^2 - y^2}$$
$$x^2 - y^2 = 16$$
$$y = \frac{15}{x}$$
$$x^4 - 16x^2 - 225 = 0$$
$$x^2 = 25 \Rightarrow \boxed{M_{1;2}(\pm 5; \pm 3)}$$

VI.12. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3y-2x}{y}} + \sqrt{\dfrac{4y}{3y-2x}} = 2\sqrt{2}, \\ 3\left(x^2+1\right) = (y+1)(y-x+1). \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(1;\ 2)\,;\ M_2\,(2;\ 4)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $y \neq 0;\ 3y \neq 2x;\ \dfrac{3y-2x}{y} > 0$

$$a = \sqrt{\frac{3y-2x}{y}} \quad (>0)$$

$$a + \frac{2}{a} = 2\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3y-2x}{y}}$$

$$y = 2x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;2)}$$

$$x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(2;4)}$$

VI.13. $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(2;\ 8)\,;\ M_2\,(8;\ 2)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x;\ y \geq 0$

$$a = x + y \quad (\geq 0)$$

$$b = \sqrt{xy} \quad (\geq 0)$$

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 - b^2 = 84 \quad \Rightarrow \quad a - b = 6 \end{cases}$$

$$a = 10$$

$$b = 4$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 10 - x \\ xy = 16 \end{cases}$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(2;8)}$$

$$x_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(8;2)}$$

VI.14. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 1 + \dfrac{7}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} = 78. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(4;\ 9)\,;\ M_2\,(9;\ 4)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x;\ y > 0$

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{xy} + 7 \\ \sqrt{xy}\,(x+y) = 78 \end{cases}$$

$$\sqrt{xy}\,(\sqrt{xy}+7)=78$$
$$(\sqrt{xy})^2+7\sqrt{xy}-78=0$$
$$\sqrt{xy}=6$$
$$\begin{cases} xy=36 \\ x+y=13 \quad \Rightarrow \quad y=13-x \end{cases}$$
$$x^2-36x+13=0$$
$$x_1=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(4;9)}$$
$$x_2=9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(9;4)}$$

VI.15. a) $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ y^2+x\sqrt{xy}=280. \end{cases}$ $\boxed{M\,(18;\ 8)}$

b) $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=105, \\ y^2+x\sqrt{xy}=70. \end{cases}$ $\boxed{M\,(9;\ 4)}$

a) Megoldás

Értelmezési tartomány: $x>0;\ y>0$

$$x^2+y\sqrt{xy}=\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=420$$
$$y^2+x\sqrt{xy}=\sqrt{y}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=280$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{420}{280}=\frac{3}{2}$$
$$x=\frac{9}{4}y$$
$$y^2+\frac{9}{4}y\sqrt{y\frac{9}{4}y}=280$$
$$y^2=64$$
$$y=8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(18;8)}$$

b) Megoldás

Értelmezési tartomány: $x>0;\ y>0$

$$x^2+y\sqrt{xy}=\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=105$$
$$y^2+x\sqrt{xy}=\sqrt{y}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=70$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{105}{70}=\frac{3}{2}$$
$$x=\frac{9}{4}y$$
$$y^2+\frac{9}{4}y\sqrt{y\frac{9}{4}y}=70$$
$$y^2=16$$
$$y=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(9;4)}$$

VI.16. $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=341, \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=330. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(25;\ 36)\,;\ M_2\,(36;\ 25)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq 0;\ y \geq 0$

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{x} \quad \geq 0 \\
b &= \sqrt{y} \quad \geq 0 \\
a^3+b^3 &= 341 \\
a^2b+ab^2 &= 330 \\
(a+b)^3 &= 341+3\cdot 330 = 1331 = 11^3 \\
a+b &= 11 \\
330 &= ab\,(a+b) = 11ab \\
&\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases} \\
a_1 = 5 \quad &\Rightarrow \quad b_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(25;36)} \\
a_2 = 6 \quad &\Rightarrow \quad b_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(36;25)}
\end{aligned}
$$

VI.17. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{x-y}} - \sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2-y^2=32. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(9;\ 7)\,;\ M_2\,(-9;\ -7)}$ $\boxed{M_3\,(9;\ -7)\,;\ M_4\,(-9;\ 7)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $|x| \neq |y|$

$$
a = \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}
$$

$$
a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2}
$$

I. eset

$$
a_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 9y = 7x
$$

$$
49x^2-49y^2 = 81y^2-49y^2 = 32y^2 = 49\cdot 32
$$

$$
y^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(9;7)} \text{ és } \boxed{M_2(-9;-7)}
$$

II. eset

$$
a_2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 9y = -7x
$$

$$
49x^2-49y^2 = 81y^2-49y^2 = 32y^2 = 49\cdot 32
$$

$$
y^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_3(9;-7)} \text{ és } \boxed{M_4(-9;7)}
$$

VI.18. $\begin{cases} \sqrt[3]{6x+5} - \sqrt[3]{4x-3y} = 1, \\ 6x+3y=4. \end{cases}$ $\boxed{M_1 = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)}$

$$M_2 = \left(\frac{-317 + 45\sqrt{33}}{32}; \frac{1015 - 135\sqrt{33}}{48} \right)$$

$$M_3 = \left(\frac{-317 - 45\sqrt{33}}{32}; \frac{1015 + 135\sqrt{33}}{48} \right)$$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

$$a = \sqrt[3]{6x+5}$$
$$b = \sqrt[3]{4x-3y}$$
$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 5a^3 - 3b^3 = 27 \end{cases}$$
$$a = b + 1$$
$$5(b+1)^3 - 3b^3 = 27$$
$$2b^3 + 15b^2 + 15b - 32 = 0$$
$$(b-1)\left(2b^2 + 17b + 32\right) = 0$$
$$b_1 = 1$$
$$a_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)}$$
$$b_2 = \frac{-17 + \sqrt{33}}{4}$$
$$a_2 = \frac{-13 + \sqrt{33}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2 = \left(\frac{-317 + 45\sqrt{33}}{32}; \frac{1015 - 135\sqrt{33}}{48} \right)}$$
$$b_3 = \frac{-17 - \sqrt{33}}{4}$$
$$a_3 = \frac{-13 - \sqrt{33}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_3 = \left(\frac{-317 - 45\sqrt{33}}{32}; \frac{1015 + 135\sqrt{33}}{48} \right)}$$

VI.19. $\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ \left(x^2+1\right)y + \left(y^2+1\right)x = 4xy. \end{cases}$ $\boxed{M\,(1;\ 1)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $xy \neq 0$

$$\sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$$
$$\frac{\sqrt{xy+1}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{xy+1}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{xy+1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{xy} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$(xy+1)(x + 2\sqrt{xy} + y) = 8xy$$

$$\left(x^2+1\right)y+\left(y^2+1\right)x=4xy$$
$$(xy+1)(x+y)=4xy$$
$$\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x+y}=2$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$$
$$y=x$$
$$2x^3+2x=4x^2$$
$$2x(x-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(1;1)}$$

VI.20. $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$ $\boxed{M\,(49;\ 49)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x, y \geq 0$

$$x-\sqrt{x}+\sqrt{y}-y=0$$
$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)=0$$

I. eset

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$
$$x+y=111 \quad \Rightarrow \quad \text{ellentmondás!}$$

II. eset

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$$
$$x+\sqrt{x}-56=0$$
$$\sqrt{x}=7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(49;49)}$$

VI.21. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$ $\boxed{M_1\left(\frac{13}{5};\ \frac{-5}{3}\right);\ M_2\,(2;\ 3)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

$$a=\sqrt[3]{x+2y}$$
$$b=\sqrt[3]{x-y+2}$$
$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases}$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$\begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases}$$
$$a_1=1 \quad \Rightarrow \quad x+2y=1$$
$$b_1=2 \quad \Rightarrow \quad x-y=6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1=\left(\frac{13}{5};\frac{-5}{3}\right)}$$
$$a_1=2 \quad \Rightarrow \quad x+2y=8$$
$$b_1=1 \quad \Rightarrow \quad x-y=-1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(2;3)}$$

VI.22. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$ $\boxed{M\,(5;\ 4)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq y > 0$

$$\sqrt{\frac{20 \cdot 16}{5}} = (x+y) - (x-y) \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

$$\sqrt{\frac{4x}{5}} = \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$\frac{4x}{5} = 2x - 2\sqrt{x^2-16}$$

$$10\sqrt{x^2-16} = 6x \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(5;4)}$$

VI.23. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$ $\boxed{M_1\,(1;7)\,;\ M_2\left(\frac{49}{64};\frac{41}{8}\right);\ M_3\,(7;-8)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \neq 0;\ y \neq -1$

$$a = \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}$$

$$a - \frac{2}{a} = 1$$

I. eset

$$a_1 = 2 = \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}$$

$$y = 8x - 1$$

$$\sqrt{9x} + \sqrt{11-7x} = 5 \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$\sqrt{9x}\sqrt{11-7x} = 7 - x \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$64x^2 - 113x + 49 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;7)}$$

$$x_2 = \frac{49}{64} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{41}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2 = \left(\frac{49}{64}; \frac{41}{8}\right)}$$

II. eset

$$a_2 = -1 = \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}$$

$$x + y + 1 = 0$$

$$x - y + 10 = 25$$

$$x = 7 \quad \Rightarrow \quad y = -8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_3(7;-8)}$$

VI.24. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6, \\ xy^2=6\sqrt{10}. \end{cases}$ $\boxed{M_{1,2}=\left(10;\pm\sqrt{6}\right)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x>0;\ y\neq 0;\ |x|\geq|y|$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6 \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$x^2+\sqrt{x^4-y^4}=18$$
$$x^2y^4=360 \quad\Rightarrow\quad y^4=\frac{360}{x^2}$$
$$x^2+\sqrt{x^4-\frac{360}{x^2}}=18$$
$$\sqrt{x^4-\frac{360}{x^2}}=18-x^2 \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$x^2-\frac{10}{x^2}=9$$
$$x^4-9x^2-10=0$$
$$x^2=10 \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{10} \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{6}$$
$$\boxed{M_{1,2}=\left(10;\pm\sqrt{6}\right)}$$

VI.25. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5. \end{cases}$ $\boxed{M_1(4;1);\ M_2\left(\frac{121}{64};\frac{169}{64}\right)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $0\leq x,y\leq 9$

$$\sqrt{x}=3-\sqrt{y} \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$x=9-6\sqrt{y}+y$$
$$\sqrt{x+5}=5-\sqrt{y+3} \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$x=23-10\sqrt{y-3}+y$$
$$9-6\sqrt{y}+y=23-10\sqrt{y-3}+y$$
$$10\sqrt{y-3}=14+\sqrt{y} \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$8y+23=21\sqrt{y} \qquad /\ (\ldots)^2$$
$$64y^2-233y+169=0$$
$$y_1=1 \quad\Rightarrow\quad x_1=4 \quad\Rightarrow\quad \boxed{M_1(4;1)}$$
$$y_2=\frac{169}{64} \quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{121}{64} \quad\Rightarrow\quad \boxed{M_2=\left(\frac{121}{64};\frac{169}{64}\right)}$$

VI.26. $\begin{cases} \sqrt{x^2+3xp+p^2}-\sqrt{y^2+3yp+p^2}=x-y \\ xy=p^2 \end{cases}$ $\boxed{M_1=(0;y);\ y\in\mathbb{R}; y\geq 0}$

$\boxed{M_2=(x;0);\ x\in\mathbb{R}; x\geq 0}$ d $\boxed{M_3=(r;r);\ r\in\mathbb{R}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: x; y nem lehet a $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}p; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}p\right)$ nyílt intervallumban (esetleg a határokat felcserélve!)
Ha $p = 0$, akkor

$$\begin{aligned} xy &= 0 \\ \text{Ha } x &= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1 = (0; y);\ y \in \mathbb{R}; y \geq 0} \\ \text{Ha } y &= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2 = (x; 0);\ x \in \mathbb{R}; x \geq 0} \end{aligned}$$

Ha $x = y$, akkor $\boxed{M_3 = (r; r);\ r \in \mathbb{R}}$

A továbbiakban $xyp \neq 0$ és $x \neq y$.

$$\sqrt{x^2+3xp+p^2} - \sqrt{y^2+3yp+p^2} = x - y$$

$$\frac{x^2+3xp-y^2-3yp}{\sqrt{x^2+3xp+p^2} + \sqrt{y^2+3yp+p^2}} = x - y$$

$$(x-y)(x+y+3p) = (x-y)\sqrt{x^2+3xp+p^2} + \sqrt{y^2+3yp+p^2}$$

$$x+y+3p = \sqrt{x^2+3xp+p^2} + \sqrt{y^2+3yp+p^2}$$

Az eredeti egyenlethez hozzáadva:

$$2\sqrt{x^2+3xp+p^2} = 2x+3p \qquad / \ (\ldots)^2$$

$$p = 0 \text{ ez pedig nem lehet.}$$

4.7. Gyökös egyenletrendszerek, 3 vagy több ismeretlen

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

VII.1. $\begin{cases} x^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ y^3 + xyz = \sqrt{xyz}, \\ z^3 + xyz = \sqrt{xyz}. \end{cases}$

$\boxed{M_1\,(0;\ 0;\ 0)\,;\ M_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $xyz \geq 0$

$$x^3 = y^3 = z^3 \quad \Rightarrow \quad x = y = z$$
$$2x^3 = \sqrt{x^3}$$
$$\sqrt{x^3}\left(2\sqrt{x^3} - 1\right) = 0$$
$$\sqrt{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(0;0;0)}$$
$$\sqrt{x^3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_2(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}})}$$

VII.2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4, \\ x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$

$\boxed{M_1\,(4;\ 1;\ 1)\,;\ M_2\,(1;\ 4;\ 1)\,;\ M_3\,(1;\ 1;\ 4)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x, y, z \geq 0$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 - \sqrt{z} \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = \left(4 - \sqrt{z}\right)^2$$
$$6 - z + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = \left(4 - \sqrt{z}\right)^2$$
$$\sqrt{xy} = z - 4\sqrt{z} + 5 \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$xy = \left(z - 4\sqrt{z} + 5\right)^2$$
$$x + y = 6 - z \qquad / \ (\ldots)^2$$
$$x^2 + y^2 + 2xy = (6 - z)^2$$
$$18 - z^2 + 2xy = (6 - z)^2$$
$$xy = z^2 - 6z + 9$$
$$z^2 - 6z + 9 = \left(z - 4\sqrt{z} + 5\right)^2$$
$$0 = z\sqrt{z} - 4z + 5\sqrt{z} - 2$$
$$0 = \left(\sqrt{z} - 1\right)\left(\sqrt{z} - 1\right)\left(\sqrt{z} - 2\right)$$

I. eset

$$\sqrt{z} = 1$$
$$z = 1$$
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1(1;4;1)}\, s\, \boxed{M_2(4;1;1)}$$

II. eset

$$\sqrt{z} = 2$$

$$z = 4$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_3(1;1;4)}$$

VII.3. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = z, \\ 2x + 2y + a = 0, \\ z^4 + az^2 + b = 0. \end{cases}$

$$\boxed{M_1\left(\frac{-1+\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{-1-\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{\sqrt{-2a+\sqrt{a^2-4b}}}{2}\right)}$$

$$\boxed{M_2\left(\frac{-1-\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{-1+\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{\sqrt{-2a+\sqrt{a^2-4b}}}{2}\right)}$$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x, y, z \geq 0$; $\quad a^2 \geq 4b \geq a^2 - 1$

$$x + y = -\frac{1}{2}a$$

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = z^2$$

$$2\sqrt{x}\sqrt{y} = z^2 + \frac{1}{2}a$$

$$\left(z^2 + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2 = 0$$

$$4xy + b - \frac{1}{4}a^2 = 0$$

$$\begin{cases} xy = \dfrac{a^2}{16} - \dfrac{b}{4} \\ x + y = -\dfrac{1}{2}a \end{cases}$$

$$(x;y) = \frac{-1 \pm \sqrt{4b+1-a^2}}{4}$$

$$\boxed{M_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{-1-\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{\sqrt{-2a+\sqrt{a^2-4b}}}{2}\right)}$$

$$\boxed{M_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{-1+\sqrt{4b+1-a^2}}{4}; \frac{\sqrt{-2a+\sqrt{a^2-4b}}}{2}\right)}$$

VII.4. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$ $\quad\boxed{M\,(3;\ -2;\ 6)}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x+y \geq 0;\ y+z \geq 0;\ z+x \geq 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}&=6\\ \sqrt{x+y}&=1 \quad\Rightarrow\quad x+y=1\\ \sqrt{y+z}&=2 \quad\Rightarrow\quad y+z=4\\ \sqrt{z+x}&=3 \quad\Rightarrow\quad z+x=9\\ x+y+z&=7 \quad\Rightarrow\quad \boxed{M(3;-2;6)}\end{aligned}$$

VII.5. $\begin{cases}\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_{2017}}=\sqrt{2017},\\ x_1+x_2+\ldots+x_{2017}=2017\end{cases}$ $\boxed{x_1=2017;\ x_i=0 \text{ és permutációi}}$

Megoldás

Értelmezési tartomány: $\forall x_i \geq 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_{2017}}&=\sqrt{2017} \qquad / \ (\ldots)^2\\ x_1+x_2+\ldots+x_{2017}+2\sum\sqrt{x_i}\sqrt{x_j}&=2017\\ \sum\sqrt{x_i}\sqrt{x_j}&=0\\ \text{minden } \sqrt{x_i}\sqrt{x_j}&=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=2017;\ x_i=0 \text{ és permutációi}}\end{aligned}$$