

## 4. Sorozatok

### Megjegyzés:

A szakirodalomban használt a sorozat tagjáról, máskor eleméről beszélni. Az alábbiakban mindkét kifejezést használtuk megtartva a feladatok eredeti fogalmazását.

### I. Feladatok

1. Van-e a 7, 13, 19, 25, ... sorozat (minden tag 6-tal nagyobb, mint az előző) tagjai között olyan szám, ami előállítható két prímszám különbségeként?

*Kalmár László Matematika Verseny 1994; 7.osztály, megyei forduló*

2. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \quad !$$

*Kalmár László Matematika Verseny 1994; 8.osztály, országos döntő*

3. Egy sorozat első két tagja:  $a_1 = 2, a_2 = 3$  és minden további tag a két szomszédjának a szorzatánál eggyel kisebb. Számítsuk ki a sorozat első 560 tagjának az összegét!

*Kalmár László Matematika Verseny 2008; 8.osztály, országos döntő*

4. A pozitív egész számokat a következő „háromszög-táblázatba” írjuk fel:

				17
			10	18
		5	11	19
	2	6	12	20
1	3	7	13	21
	4	8	14	22
		9	15	23
			16	24
				25

A táblázat középső sora így kezdődik: 1, 3, 7, 13, 21, ...

Mi lesz ennek a középső sornak a 100. eleme?

*Kalmár László Matematika Verseny 1998; 7.osztály, megyei forduló*

5. Igazoljuk, hogy ha  $n \geq 1$  egész szám, akkor az

$$n + 1, 2n + 1, 3n + 1, 4n + 1 \dots$$

sorozatban mindig van négyzetszám és mindig van köbszám is.

*Kalmár László Matematika Verseny 2010; 8.osztály, országos döntő*

6. Az  $x_n$  sorozatot az alábbi módon értelmezzük:

$$x_1 = 5,$$

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad \text{ha} \quad n \geq 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy  $x_{n+1}$  és  $x_n$  utolsó  $n$  jegye megegyezik.

*KöMaL 1986/december; F. 2608.*

7. Hány olyan természetes számokból álló (végtelen) sorozat van, amelyben az első  $2n$  tag összegének és az első  $n$  tag összegének hányadosa nem függ  $n$  megválasztásától, továbbá amely sorozatnak egyik tagja az 1971 szám?

*KöMaL 1971/március; F. 1763.*

8. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal. (A Fibonacci sorozatban  $a_1 = 1, a_2 = 1$  és  $a_n = a_{n-1} + a_n$  minden  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  esetén.)

*KöMaL 2009/szeptember; C. 997.*

9. Legyen  $n$  rögzített pozitív egész. Hány olyan  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$  sorozat van, amelyben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros egész számok?

*KöMaL 1992/szeptember; F. 2916.*

10. Jelölje  $a_1, a_2, a_3, a_4$  a Pascal-háromszög egyik sorának négy egymás után következő elemét. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}, \frac{a_2}{a_2 + a_3}, \frac{a_3}{a_3 + a_4}$$

számok számtani sorozatot alkotnak.

*KöMaL 2010/április; B. 4266.*

11. Egy sorozat első tagja 2011. A második tagtól kezdve minden tag megegyezik az öt megelőző tagnál 2-vel nagyobb szám reciprokának  $(-2)$ -szeresével. Mennyi a sorozat 2011. tagja?

*KöMaL 2011/szeptember; K. 296.*

12. Az  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sorozatot a következő módon képeztük:  $a_1, a_2, a_3$  pozitív egészek,  $a_3 > 2a_2 + a_1$ ,  $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$  ( $n = 4, 5, \dots$ ). Bizonyítsuk be, hogy  $a_{1000} > 2^{999}$ .

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1982; haladók, általános tantervű osztályok, 2.forduló*

13. Az  $1, 2, \dots, n$  számokat valamilyen – tetszés szerinti – sorrendben leírva kapjuk az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számokat. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot a_1} + \frac{1}{2 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{n \cdot a_n}$$

összeg értéke akkor a legkisebb, ha csökkenő sorrendbe rendeztük a számainkat, azaz  $a_1 = n, \dots, a_n = 1$ .

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1985; kezdők, speciális matematika tagozat, 2. forduló*

14. Definiáljuk az  $a_n$  ( $n \geq 0$ ) sorozatot a következőképpen:  $a_0 := 0$ , az  $a_1 := 1$ ; és  $n \geq 2$ -re

$a_n := 6a_{n-1} - a_{n-2}$ . Bizonyítsa be, hogy  $(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^n \cdot a_{n+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{n+1} \cdot a_n = 1$  minden  $n \geq 0$ -ra!

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2006/2007; kezdők, III. kategória, 3.forduló*

15. Legyen  $a_n$  a következő módon definiált sorozat:  $a_1 = 18$ ;  $a_2 = 48$ ;  $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ , ha  $n > 2$ .

Hány négyzetszám van a sorozatban?

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók I. kategória, 2.forduló*

16. Két számtani sorozat első tagja megegyezik. Az első sorozat egyik tagjának a négyzete a másik ugyanannyiadik tagjának a négyzeténél 7-tel nagyobb, a megelőző tagok négyzeteinek a különbsége  $343/64$ , a következő tagok négyzeteinek a különbsége pedig  $567/64$ . Megállapítható-e ezekből az adatokból, hogy a sorozatok hányadik tagjairól van szó? Megállapítható-e a sorozatok valamilyen további adata?

*OKTV 1968; általános tantervű osztályok, 2.forduló*

17. Az  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sorozatban  $a_0$  természetes szám, és

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozatban van irracionális szám.

*OKTV 1973; szakosított matematika I. tantervű osztályok, 2.forduló*

18. Legyen  $a_n$  az összes, a tízes számrendszerben legfeljebb  $n$  jegyű nem negatív egész számok száma,  $b_n$  pedig ezek közül azoknak a száma, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában van 5-ös számjegy. Adjuk meg  $a_n$ -et és  $b_n$ -et  $n$  függvényeként, valamint a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

határértéket.

*OKTV 1977; I.forduló*

19. Egy sorozatban  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ , ha  $n > 1$ . Állítsuk elő  $a_n$ -et  $n$  függvényeként!

*OKTV 1996/97; II. kategória, 1.forduló*

20. Igaz-e, hogy a  $7k + 3, k = 0, 1, 2, \dots$  számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 123321.)

*OKTV 2005/2006; III. kategória, 1.forduló*

21. Mutassuk meg, hogy ha  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tetszőleges pozitív számok, akkor  $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty$  és  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$  közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív  $c_1, c_2, c_3, \dots$  számok esetén  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$  azt jelenti, hogy az  $s_k = c_1 + c_2 + \dots + c_k$  összegek  $k$  növekedésével minden határon túl nőnek.)

*OKTV 2008/2009; III. kategória, 2.forduló*

22. Határozzuk meg az  $S = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n + \dots + (n - 1)n$  összeget.

„Ki miben tudós?” vetélkedő 1964; elődöntő feladata

23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges adott  $n$  természetes számhoz megadható végtelen sok 2-hatvány úgy, hogy ezek közül bármely kettőnek a különbsége osztható  $n$ -nel.

„Ki miben tudós?” vetélkedő 1966; döntő feladata

24. Legyen

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n},$$

ahol  $n$  pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A, 2A, 4A, \dots, 2^k A, \dots$$

sorozatban van egész szám.

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1934.évi 1. feladata

25. Az  $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$  természetes számok végtelen sorozatában

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$$

minden  $k > 1$  értékre teljesül. Bebizonyítandó, hogy minden természetes szám felírható ebből a sorozatból kiválasztott számok összegeként (vagy pedig előfordul a sorozatban).

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1960.évi 2. feladata

26. Bizonyítandó, hogy nincs olyan, természetes számokból álló végtelen sorozat, amelynek nem minden eleme egyenlő, s amelynek minden eleme (a másodiktól kezdve) a két szomszédos elem harmonikus közepe ( $a$  és  $b$  harmonikus közepe  $\frac{2ab}{a+b}$ ).

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1968.évi 1. feladata

27. Mennyivel egyenlő  $n$ , ha  $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \dots + [\sqrt[3]{n}] = 2n$  ?

(Az  $[x]$  az  $x$  szám egészrészét jelöli.)

(A) 29                      (B) 33                      (C) 41                      (D) 49                      (E) 53

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, országos forduló

28. Jelölje  $\{a_n\}$  azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 7-tel osztva 5 maradékot adnak,  $\{b_n\}$  azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak! Mindkét sorozat első eleme legyen a lehető legkisebb! Az  $\{a_n\}$  sorozat első  $n$  elemének az összegét jelölje  $H_n$ , a  $\{b_n\}$  sorozat első  $n$  elemének az összegét jelölje  $\ddot{O}_n$ ! Mennyi  $n$  értéke, ha

$$\frac{H_n}{\ddot{O}_n} = \frac{32}{23} ?$$

(A) 9                      (B) 18                      (C) 27                      (D) 81                      (E) Nincs ilyen  $n$ .

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 12. osztály, megyei forduló

29. Egy számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-2}}, \text{ ha } n = 2; 3; 4; \dots$$

Mennyivel egyenlő az  $x_{2011}$ , ha  $a = \frac{1}{2011}$  és  $b = \frac{1}{2010}$ ?

- (A)  $\frac{1}{2011}$       (B)  $\frac{1}{2010}$       (C) 1      (D) 2010      (E) 2011

*Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 12. osztály, országos forduló*

30. Vizsgáljuk meg az  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  sorozatot. Vegyük a szomszédos elemek különbségét, az alábbi módon egy különbségi háromszöget állítsunk elő:

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{30}$	...
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	...	
		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{60}$	...	
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	...		
			$-\frac{1}{6}$	...		

Forgassuk el a táblázatot  $60^\circ$ -al úgy hogy az 1-es szám kerüljön a háromszög csúcsába. és hagyjuk el az előjeleket.

			1			
			1	1		
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	

Ezután minden sor minden elemét osszuk el az illető sor szélén álló számmal és vegyük az eredmény reciprokát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a Pascal-háromszöget kapjuk

				1			
			1		1		
		1		2		1	
	1		3		3		1
	1	4		6		4	1
1	5	10		10		5	1

*D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom:  
Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*

*Aritmetika és algebra, 320. feladat*

## II. Megoldások

1. Van-e a 7, 13, 19, 25, ... sorozat (minden tag 6-tal nagyobb, mint az előző) tagjai között olyan szám, ami előállítható két prímszám különbségeként?

*Kalmár László Verseny, 1994, 7.osztály, megyei forduló*

### Megoldás:

A sorozat tagjai  $6k + 1$  alakban írhatóak fel, ahol  $k \geq 1$  egész szám, ezért a sorozat minden tagja pozitív páratlan szám. Két prímszám különbségeként csak akkor állítható elő egy páratlan szám, ha az egyik prímszám páros, azaz 2. Azt keressük, hogy van-e olyan  $p$  prímszám, amelyre  $6k + 1 = p - 2$  teljesül. Ekkor  $p = 6k + 3$  alakú, tehát  $p$  3-mal osztható lenne. Egyetlen 3-mal osztható prímszám van, a 3, de  $6k + 3 > 3$ , ezért nem lehet prím. Ezzel beláttuk, hogy a sorozat egyetlen tagja sem állítható elő két prímszám különbségeként.

2. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \quad !$$

*Kalmár László Verseny, 1994, 8.osztály, országos döntő*

### Megoldás:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \\ & = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \quad . \end{aligned}$$

### Megjegyzés:

Hasonlóan belátható, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad ,$$

ahol  $n \geq 1$  egész szám.

3. Egy sorozat első két tagja:  $a_1 = 2, a_2 = 3$  és minden további tag a két szomszédjának a szorzatánál eggyel kisebb. Számítsuk ki a sorozat első 560 tagjának az összegét!

*Kalmár László Verseny, 2008, 8.osztály, országos döntő*

### Megoldás:

A sorozat képzési szabálya szerint:

$$a_n \cdot a_{n+2} - 1 = a_{n+1} \quad .$$

Ezt átrendezve:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} .$$

Ezt a szabályt alkalmazva kiszámítjuk a sorozat néhány tagját: 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, ... A 2 és 3 már szerepelt a sorozat első két elemeként. Tehát a képzési szabály miatt inentől kezdve ismétlődik a sorozat. Az ismétlődő periódus 5 elemből áll, amelyeknek az összege 9.  $560:5 = 112$ , tehát 112 ismétlődő periódust kell összeadnunk, ez alapján az első 560 tag összege  $9 \cdot 112 = 1008$ .

4. A pozitív egész számokat a következő „háromszög-táblázatba” írjuk fel:

				17
			10	18
		5	11	19
	2	6	12	20
1	3	7	13	21
	4	8	14	22
		9	15	23
			16	24
				25

A táblázat középső sora így kezdődik: 1, 3, 7, 13, 21, ...

Mi lesz ennek a középső sornak a 100. eleme?

*Kalmár László Verseny, 1998, 7.osztály, megyei forduló*

**Megoldás:**

A középső sorban a második tag 2-vel nagyobb az elsőnél, a harmadik tag 4-gyel nagyobb a másodiknál, a negyedik tag 6-tal nagyobb a harmadiknál és így tovább:

$$a_{n+1} = a_n + 2n .$$

Ennek alapján a középső sor 100. elemét így számolhatjuk ki:

$$a_{100} = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 196 + 198 = 1 + \frac{(2 + 198) \cdot 99}{2} = 9901 .$$

5. Igazoljuk, hogy ha  $n \geq 1$  egész szám, akkor az

$$n + 1, 2n + 1, 3n + 1, 4n + 1 \dots$$

sorozatban mindig van négyzetszám és mindig van köbszám is.

*Kalmár László Verseny, 2010, 8.osztály, országos döntő*

**Megoldás:**

Olyan  $k$  és  $m$  egész számot keresünk, amelyre  $k \cdot n + 1 = m^2$ . Átrendezve:

$$k \cdot n = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1) .$$

Válasszuk az  $n = m - 1$  és  $k = m + 1$  megfeleltetést. Ekkor  $m = n + 1$  és  $k = n + 2$ .

Valóban  $(n + 2)n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$  négyzetszám.

Köbszámot hasonló módszerrel állíthatunk elő:

Olyan  $k$  és  $m$  egész számot keresünk, amelyre  $k \cdot n + 1 = m^3$ . Átrendezve és szorzattá alakítva:

$$k \cdot n = m^3 - 1 = (m - 1)(m^2 + m + 1) .$$



Jó megfeleltetés:

$$n = m - 1 ; k = m^2 + m + 1$$

Tehát:

$$m = n + 1 ; k = (n + 1)^2 + n + 1 + 1 = n^2 + 3n + 3 .$$

Így

$$(n^2 + 3n + 3)n + 1 = (n + 1)^3$$

formában köbszámot kapunk.

### Megjegyzés:

Általános iskolás ismeretekkel így lehet gondolkozni:

$k \cdot n + 1$  alakú négyzetszámot keresünk, és az  $(a \cdot n + 1)^2$  ilyen. Válasszuk  $a$ -t 1-nek, ekkor

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = (n + 2)n + 1,$$

tehát a sorozat  $(n + 2)$ -edik tagja négyzetszám.

$k \cdot n + 1$  alakú köbszámot keresünk, és az  $(a \cdot n + 1)^3$  ilyen. Válasszuk  $a$ -t 1-nek, ekkor

$$(n + 1)^3 = (n^2 + 2n + 1)(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n^2 + 3n + 3)n + 1,$$

azaz a sorozat  $(n^2 + 3n + 3)$ -edik tagja köbszám.

6. Az  $x_n$  sorozatot az alábbi módon értelmezzük:

$$x_1 = 5,$$

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad \text{ha} \quad n \geq 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy  $x_{n+1}$  és  $x_n$  utolsó  $n$  jegye megegyezik.

*KöMaL 1986/december; F. 2608.*

### Megoldás:

A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n = 1$ -re igaz az állítás, hiszen  $x_2 = 25$ ;  $x_1 = 5$ , tehát az utolsó számjegyek egyenlőek.

$n = k$ -ra feltételezzük, hogy igaz az állítás, azaz  $x_{k+1}$  és  $x_k$  utolsó  $k$  jegye megegyezik. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy  $10^k | x_{k+1} - x_k$ .

$n = k + 1$ -re bizonyítjuk az állítást:

A sorozat képzési szabálya alapján  $x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1}^2 - x_k^2 = (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k)$ . Az indukciós feltétel alapján  $10^k | x_{k+1} - x_k$ .  $x_{k+1}$  és  $x_k$  5 hatványa, ezért 5-re végződnek, tehát az összegük 0-ra végződik, így osztható 10-zel. Ezek alapján  $10^{k+1} | x_{k+2} - x_{k+1}$ , amiből következik, hogy  $x_{k+2}$  és  $x_{k+1}$  utolsó  $k+1$  jegye megegyezik.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

7. Hány olyan természetes számokból álló (végtelen) sorozat van, amelyben az első  $2n$  tag összegének és az első  $n$  tag összegének hányadosa nem függ  $n$  megválasztásától, továbbá amely sorozatnak egyik tagja az 1971 szám?

*KöMaL 1971/március; F. 1763.*

**Megoldás:**

Ha a sorozat első tagja  $a_1$ , a differencia  $d$ , akkor az első  $2n$  tag összegének és az első  $n$  tag összegének hányadosa :

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{2n(2a_1 + (2n - 1)d)}{n(2a_1 + (n - 1)d)} = \frac{4a_1 + (4n - 2)d}{2a_1 + (n - 1)d}.$$

Ha ez a hányados minden  $n$ -re azonos, akkor  $n = 1$  és  $n = 2$ -re is:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4a_1 + 2d}{2a_1} = \frac{S_4}{S_2} = \frac{4a_1 + 6d}{2a_1 + d}.$$

Átrendezve:

$$\begin{aligned} 8a_1^2 + 8a_1 \cdot d + 2d^2 &= 8a_1^2 + 12a_1 \cdot d \\ 2d^2 - 4a_1 \cdot d &= 2d(d - 2a_1) = 0. \end{aligned}$$

Ez  $d = 0$  vagy  $d = 2a_1$  esetén teljesül.

Ha  $d = 0$ , akkor  $a_1 \neq 0$ , mert ellenkező esetben  $S_{2n} = S_n = 0$  lenne, tehát nem írhatnánk fel ezek hányadosát. Ekkor a sorozat tagjai egyenlők és 1971-gyel kell megegyezniük. Ez valóban alkalmas sorozat, mert a vizsgált hányados 2.

Ha  $d = 2a_1$ , akkor is szükséges az  $a_1 \neq 0$  feltétel. Ekkor a sorozat tagjai:  $a_1, 3a_1, 5a_1, \dots$

Ezek között akkor szerepel az 1971, ha  $(2k - 1)a_1 = 1971$  teljesül valamilyen  $a_1$  és  $k$  természetes szám esetén.  $1971 = 3^3 \cdot 73$ . Ezt felhasználva a lehetséges értékek:

$a_1$	1	3	9	27	73	$3 \cdot 73$	$9 \cdot 73$	$27 \cdot 73$
$k$	$\frac{27 \cdot 73 + 1}{2}$	$\frac{9 \cdot 73 + 1}{2}$	$\frac{3 \cdot 73 + 1}{2}$	$\frac{73 + 1}{2}$	$\frac{27 + 1}{2}$	$\frac{9 + 1}{2}$	$\frac{3 + 1}{2}$	$\frac{1 + 1}{2}$

Az 1971 a sorozat  $k$ -adik tagja lesz.

Ezek a sorozatok is megfelelőek, mert:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{4a_1 + (4n - 2)d}{2a_1 + (n - 1)d} = \frac{4a_1 + (4n - 2) \cdot 2a_1}{2a_1 + (n - 1) \cdot 2a_1} = \frac{8a_1n}{2a_1n} = 4.$$

Tehát 9 megfelelő sorozat van.

8. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal. (A Fibonacci sorozatban  $a_1 = 1, a_2 = 1$  és  $a_n = a_{n-1} + a_n$  minden  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  esetén.)

*KöMaL 2009/szeptember; C. 997.*

**Megoldás:**

Számítsuk ki a sorozat néhány tagját a képzési szabály alapján:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, \dots$$

Az a sejtésünk, hogy minden olyan tag osztható 3-mal, amelynek az indexe osztható 4-gyel. Azt fogjuk teljes indukcióval bizonyítani, hogy  $a_{4n}$  osztható 3-mal, ha  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

$n = 1$ -re igaz az állítás

$n = k$ -ra feltételezzük, hogy  $a_{4k}$  osztható 3-mal.

$n = k + 1$ -re bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)} &= a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{4k+2} = a_{4k+2} + a_{4k+1} + a_{4k+1} + a_{4k} = a_{4k+2} + 2a_{4k+1} + a_{4k} = \\ &= a_{4k+1} + a_{4k} + 2a_{4k+1} + a_{4k} = 2a_{4k} + 3a_{4k+1} \end{aligned}$$

$3a_{4k+1}$  osztható 3-mal, mert egyik tényezője 3,  $2a_{4k}$  pedig az indukciós feltétel alapján osztható 3-mal. Így beláttuk a feladat állítását.

### Megjegyzés:

Kicsit egyszerűbben – kevésbé „hivatalosan” – elmondva:

A Fibonacci sorozatban a 3-mal való osztási maradékok: 1, 1; 2; 0; 1; 1; 2; 0; ..., a képzési szabályból adódóan periodikusan ismétlődnek, tehát minden negyedik tag osztható 3-mal.

9. Legyen  $n$  rögzített pozitív egész. Hány olyan  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$  sorozat van, amelyben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros egész számok?

*KöMaL 1992/szeptember; F. 2916.*

### Megoldás:

Jelölje  $A_n$  az  $n$  egész számhoz tartozó ilyen sorozatok számát.

$A_1 = 1$ , mert egyetlen ilyen sorozat van:  $a_1 = 1$ .

$A_2 = 2$ , ezek a sorozatok:  $a_1 = 1$ ; illetve az  $a_1 = 1; a_2 = 2$ .

Tegyük fel, hogy már meghatároztuk  $A_1, A_2, \dots, A_n$  értékét ( $n \geq 2$ ). Hogyan tudunk  $n + 1$  - hez megfelelő sorozatot készíteni?

Ha a sorozat nem tartalmazza az  $n + 1$  számot, akkor nyilván minden  $n$ -hez tartozó sorozatot megkapunk, ezek száma  $A_n$ .

Ha a sorozatnak az utolsó tagja  $n + 1$  és van  $n$ -nél kisebb tagja, akkor ezt a sorozatot az alábbi módon kaphattuk:

- vettünk egy  $n$ -nél kisebb elemeket tartalmazó sorozatot, amelyben az utolsó tag paritása  $n + 1$ -gyel ellentétes és ehhez hozzávettük  $n + 1$ -et;
- vettünk egy  $n$ -nél kisebb elemeket tartalmazó sorozatot, amelyben az utolsó tag paritása  $n + 1$ -gyel azonos és ehhez hozzávettük  $n$ -et és  $n + 1$ -et.

Így felhasználtuk az összes olyan sorozatot, amelyek  $n$ -nél kisebb elemeket tartalmaznak. Ezek száma  $A_{n-1}$ .

Ha a sorozatnak az utolsó tagja  $n + 1$  és nincs  $n$ -nél kisebb tagja, akkor egyetlen sorozatot készíthetünk:

Ha  $n + 1$  páratlan, akkor az  $a_1 = n + 1$  sorozat megfelelő, ha  $n + 1$  páros, akkor az  $a_1 = n$  és  $a_2 = n + 1$  sorozat jó.

Ezzel megkaptuk, hogy  $A_{n+1} = A_n + A_{n-1} + 1$ .

Ez a képzési szabály a Fibonacci sorozatra emlékeztet. A kiindulási elemeket figyelembe véve megmutatható, hogy  $A_n = f_{n+2} - 1$ , ahol  $f_1 = 1; f_2 = 1; f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  a Fibonacci sorozat első elemei és a rekurzív megadási módja.

10. Jelölje  $a_1, a_2, a_3, a_4$  a Pascal-háromszög egyik sorának négy egymás után következő elemét. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}, \frac{a_2}{a_2 + a_3}, \frac{a_3}{a_3 + a_4}$$

számok számtani sorozatot alkotnak.

*KöMaL 2010/április, B. 4266.*

**Megoldás:**

A Pascal-háromszög  $n$ -edik sorának két szomszédos eleme  $\binom{n}{k}$  és  $\binom{n}{k+1}$ . Ezekkel a kifejezésekkel felírva a megfelelő törtet:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}} = \frac{k+1}{n+1}$$

összefüggést kapjuk. A következő két tört értéke ugyanígy számolva:  $\frac{k+2}{n+1}; \frac{k+3}{n+1}$ . Ebből látható, hogy számtani sorozatot kaptunk, amelynek a differenciája  $\frac{1}{n+1}$ , ami csak attól függ, hogy a Pascal-háromszög melyik sorából vettük az elemeket.

11. Egy sorozat első tagja 2011. A második tagtól kezdve minden tag megegyezik az öt megelőző tagnál 2-vel nagyobb szám reciprokának  $(-2)$ -szeresével. Mennyi a sorozat 2011. tagja?

*KöMaL 2011/szeptember, K. 296.*

**Megoldás:**

A sorozat tagjai:

$$a_1 = 2011; a_2 = -\frac{2}{2013}; a_3 = -\frac{2}{-\frac{2}{2013} + 2} = -\frac{2}{\frac{4024}{2013}} = -\frac{2013}{2012};$$

$$a_4 = -\frac{2}{-\frac{2013}{2012} + 2} = -\frac{4024}{2011}; a_5 = -\frac{2}{-\frac{4024}{2011} + 2} = 2011.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat tagjai négyesével ismétlődnek.  $2011 = 4 \cdot 502 + 3$ , így  $a_{2011} = a_3 = -\frac{2013}{2012}$ .

12. Az  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sorozatot a következő módon képeztük:  $a_1, a_2, a_3$  pozitív egészek,  $a_3 > 2a_2 + a_1$ ,  $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$  ( $n = 4, 5, \dots$ ). Bizonyítsuk be, hogy  $a_{1000} > 2^{999}$ .

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1982; haladók, általános tantervű osztályok, 2.forduló*

**Megoldás:**

Teljes indukció módszerével azt fogjuk bebizonyítani, hogy  $n \geq 4$  esetén  $a_n \geq 2^{n-1}$ .

$n = 4$  –re bizonyítjuk az állítást:

$$a_4 = 4a_3 - 3a_2 - 2a_1 \geq 4(2a_2 + a_1 + 1) - 3a_2 - 2a_1 = 5a_2 + 2a_1 + 4 > 8 = 2^3.$$

$n$  –nél ( $n \geq 5$ ) kisebb  $k$  egészekre feltételezzük, hogy

$$a_k > 2^{k-1}.$$

$n$  –re bizonyítjuk az állítást:

A rekurziós formulát átrendezzük:

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2a_{n-3} = 2(a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-3})$$

Ez azt jelenti, hogy  $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2}$  egy mértani sorozat, így

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-3}(a_3 - 2a_2 - a_1) \geq 2^{n-3}.$$

Ezt átrendezve:

$$a_n \geq 2^{n-3} + 2a_{n-1} + a_{n-2} \geq 2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-3} = 6 \cdot 2^{n-3} > 2^{n-1}.$$

Ezzel bizonyítottuk az állításunkat,  $n = 1000$ -re alkalmazva:  $a_{1000} > 2^{999}$ .

13. Az  $1, 2, \dots, n$  számokat valamilyen – tetszés szerinti – sorrendben leírva kapjuk az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számokat. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot a_1} + \frac{1}{2 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{n \cdot a_n}$$

összeg értéke akkor a legkisebb, ha csökkenő sorrendbe rendeztük a számainkat, azaz  $a_1 = n, \dots, a_n = 1$ .

*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1985; kezdők, speciális matematika tagozat, 2.forduló*

### Megoldás:

Megvizsgáljuk először, hogyan változik az

$$\frac{1}{k \cdot a_k} + \frac{1}{l \cdot a_l} \quad (1)$$

összeg, ha  $k > l$  és ezt a két számot felcseréljük a nevezőkben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k \cdot a_k} + \frac{1}{l \cdot a_l} - \left( \frac{1}{l \cdot a_k} + \frac{1}{k \cdot a_l} \right) &= \frac{1}{k \cdot l \cdot a_k a_l} (la_l + ka_k - ka_l - la_k) = \\ &= \frac{1}{k \cdot l \cdot a_k a_l} (k - l)(a_k - a_l) > 0 \end{aligned}$$

akkor és csak akkor, ha  $a_k > a_l$ . Ezért ha az  $a_k$  és  $a_l$  tényezőket felcseréljük, akkor az (1) összeg csökken.

Legyen az  $1, 2, 3, \dots, n$  számok egy tetszőleges sorrendje  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Alkalmas cserékkel csökkentsük az

$$S = \frac{1}{1 \cdot a_1} + \frac{1}{2 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{n \cdot a_n}$$

összeget.

Ha az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sorozat különbözik az  $n, n-1, \dots, 1$  sorozattól, azaz nem szigorúan monoton csökken, akkor van két tagja, amelyek egymáshoz képest növekvően állnak, azaz van olyan  $l < k$ , hogy  $a_l < a_k$ . Ekkor az  $a_l$  és  $a_k$  számokat a sorozatban megcserélve az előbbi megállapítás miatt  $S$  csökken. Ilyen módon az  $S$  értéke mindig csökkenthető, ha az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sorozat különbözik az  $n, n-1, \dots, 1$  sorozattól. Az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sorozatnak véges sok sorrendje van, ezért véges sok lépésben, az  $S$  értékét csökkentve eljutunk az  $n, n-1, \dots, 1$  sorozathoz.

Ekkor megkapjuk a minimum értékét:

$$M = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1}.$$

14. Definiáljuk az  $a_n$  ( $n \geq 0$ ) sorozatot a következőképpen:  $a_0 := 0$ , az  $a_1 := 1$ ; és  $n \geq 2$ -re

$a_n := 6a_{n-1} - a_{n-2}$ . Bizonyítsa be, hogy  $(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^n \cdot a_{n+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{n+1} \cdot a_n = 1$  minden  $n \geq 0$ -ra!

*Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2006/2007; kezdők, III. kategória, 3. forduló*

**Megoldás:**

Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

$n = 0$  - ra igaz az egyenlőség.

$n = k$  - ra feltételezzük, hogy

$$(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^k \cdot a_{k+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} \cdot a_k = 1.$$

$n = k + 1$  - re bizonyítunk:

$$\begin{aligned} & (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} \cdot a_{k+2} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+2} \cdot a_{k+1} = \\ & = (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} (6 \cdot a_{k+1} - a_k) - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+2} \cdot a_{k+1} = \\ & = 6 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} \cdot a_{k+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} a_k - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+2} \cdot a_{k+1} \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben előállítunk egy olyan részletet, amiben az indukciós feltételt fel tudjuk használni, majd megvizsgáljuk a maradék tagokat:

$$\left\{ (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^k \cdot a_{k+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} \cdot a_k \right\} + \left( 6 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^k \right) \cdot a_{k+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{k+2} \cdot a_{k+1} = 1 + a_{k+1} \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^k \left( 6 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) - 1 - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 \right). \quad (*)$$

Ebben a kifejezésben:

$$6 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) - 1 - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 18 - 12 \cdot \sqrt{2} - 1 - 9 + 12 \cdot \sqrt{2} - 8 = 0.$$

Ezért a (\*) összefüggés értéke 1, ezzel az állítást beláttuk  $n = k + 1$ - re, befejeztük a teljes indukciós bizonyítást.

15. Legyen  $a_n$  a következő módon definiált sorozat:  $a_1 = 18$ ;  $a_2 = 48$ ;  $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ , ha  $n > 2$ .

Hány négyzetszám van a sorozatban?

*Arany Dániel Matematikai Tanulmányverseny 2012/2013; haladók, I. kategória, 2. forduló*

**Megoldás:**

$a_1 = 2 \cdot 3^2$ ;  $a_2 = 2^4 \cdot 3$ . A további tagokat a rekurzió szerint képezve mindig olyan számokat fogunk kapni, amelyben csak a 2 és 3 szerepel prímtényezőként. Akkor kapunk négyzetszámot, ha mindkét prímszám kitevője páros. A képzési szabály miatt a 2-hatványok kitevőjének kettes maradéka így ismétlődik: 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; ..., tehát 3 számból álló periódus: 1; 0; 1. A 3 kitevőinek kettes maradéka pedig így ismétlődik: 0; 1; 1; 0; 1; 1; , azaz szintén 3 számból álló periódust kapunk: 0; 1; 1. Láthatóan nem egyszerre lesz páros a 2 és a 3 kitevője, tehát sohasem kapunk négyzetszámot.

16. Két számtani sorozat első tagja megegyezik. Az első sorozat egyik tagjának a négyzete a másik ugyanannyiadik tagjának a négyzeténél 7-tel nagyobb, a megelőző tagok négyzeteinek a különbsége  $343/64$ , a következő tagok négyzeteinek a különbsége pedig  $567/64$ . Megállapítható-e ezekből az adatokból, hogy a sorozatok hányadik tagjairól van szó? Megállapítható-e a sorozatok valamilyen további adata?

*OKTV 1968; általános tantervű osztályok, 2. forduló*

**Megoldás:**

A két sorozat első tagját jelöljük  $a$ -val, a differenciák legyenek  $d$  és  $D$ . A feladat feltételei legyenek igazak az  $n$ -edik,  $(n + 1)$ -edik,  $(n + 2)$ -edik tagokra:

$$(a + nd)^2 - (a + nD)^2 = 7$$

$$(a + (n - 1)d)^2 - (a + (n - 1)D)^2 = \frac{343}{64}$$

$$(a + (n + 1)d)^2 - (a + (n + 1)D)^2 = \frac{567}{64}$$

Átrendezve:

$$2an(d - D) + n^2(d^2 - D^2) = 7 \quad (1)$$

$$2a(n - 1)(d - D) + (n - 1)^2(d^2 - D^2) = \frac{343}{64} \quad (2)$$

$$2a(n + 1)(d - D) + (n + 1)^2(d^2 - D^2) = \frac{567}{64} \quad (3)$$

A (2) és (3) számtani közepéből kivonjuk az (1) egyenletet:

$$(d^2 - D^2) = \frac{7}{64}. \quad (4)$$

Ezt visszahelyettesítjük (1) és (2)-be:

$$2an(d - D) + \frac{7}{64}n^2 = 7 \quad (5)$$

$$2a(n - 1)(d - D) + \frac{7}{64}(n - 1)^2 = \frac{343}{64} \quad (6)$$

(5)-ből (6)-t kivonva :

$$2a(d - D) + \frac{7}{64}(2n - 1) = \frac{105}{64} \quad (7)$$

Ennek  $n$ -szeresét (5)-ből kivonva, majd rendezve:

$$\frac{7}{64}(n^2 - 2n^2 + n) = 7 - \frac{105n}{64}$$
$$n^2 - 16n + 64 = (n - 8)^2 = 0.$$

Tehát  $n = 8$ , ezért a 8. 9. 10. tagokról beszél a feladat.

Ezt az eredményt visszahelyettesítjük a (7) egyenletbe:

$$a(d - D) = 0.$$

$d \neq D$ , mert a két sorozatnak nem minden tagja egyenlő, ezért csak  $a = 0$  lehetséges. Így a két sorozatot  $a_n = (n - 1)d$  és  $A_n = (n - 1)D$ , alakban adhatjuk meg. Az (1); (2); és (3) egyenletek négy ismeretlent tartalmaznak, ezért nem tudjuk mindegyik ismeretlent meghatározni.

Az  $a$  és  $n$  meghatározható és azt tudjuk mondani, hogy  $d$  és  $D$  között fennáll a (4) összefüggés.

17. Az  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sorozatban  $a_0$  természetes szám, és

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozatban van irracionális szám.

*OKTV 1973; szakosított matematika I. tantervű osztályok, 2. forduló*

### **Megoldás:**

Először azt bizonyítjuk, hogy ha  $a$  természetes szám és  $\sqrt{a}$  racionális, akkor egész szám is. Indirekt bizonyítást adunk. Tegyük fel, hogy  $\sqrt{a} = \frac{b}{c}$ , ahol  $b, c$  relatív prímelek és  $c \neq 1$ . ekkor négyzetre emelés után:

$$b^2 = ac^2.$$

$c \neq 1$ , ezért van prímosztója, legyen  $p$  az egyik. A fenti összefüggés szerint  $p$  osztója  $b^2$ -nek is, így  $b$ -nek is. Ekkor  $b$  és  $c$  nem lenne relatív prím, ezzel ellentmondásra jutottunk. Tehát  $\sqrt{a}$  egész.

Most az eredeti állítást bizonyítjuk teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy  $a_0$  természetes szám és az  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$  rekurzióval megadott mindegyik szám racionális, az előbbi bizonyításból adódóan természetes szám. A sorozat egyik tagja sem lehet 1, mert akkor a következő  $\sqrt{2}$  lenne, ami irracionális. Tehát a sorozat mindegyik tagja legalább 2. Így:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} \leq a_n.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat monoton fogy. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mert nincs végtelen sok természetes számból álló monoton fogyó sorozat. A feladat állítását beláttuk.



18. Legyen  $a_n$  az összes, a tízes számrendszerben legfeljebb  $n$  jegyű nemnegatív egész számok száma,  $b_n$  pedig ezek közül azoknak a száma, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában van 5-ös számjegy. Adjuk meg  $a_n$ -et és  $b_n$ -et  $n$  függvényeként, valamint a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

határértéket.

OKTV 1977; I. forduló

**Megoldás:**

A legfeljebb  $n$ -jegyű nemnegatív számok:  $0; 1; \dots; 10^n - 1$ , tehát  $a_n = 10^n$ . Azokat a számokat, amelyekben van 5-ös számjegy, úgy kapjuk meg, ha az összes számból levonjuk azokat, amelyekben nincs 5-ös. Legfeljebb  $n$ -jegyű számokat vizsgálunk, ezért mindenütt, a szám elején is megengedjük a nullát. Most 5-öst nem használunk, ezért minden helyiértéken 9-féle számjegyből választhatunk, így  $9^n$  a rossz esetek száma, azaz  $b_n = 10^n - 9^n$  olyan nemnegatív szám van, amelyben szerepel az 5-ös. Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{10^n - 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

Felhasználtuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , ha  $q$  olyan valós szám, amelyre  $|q| < 1$ .

19. Egy sorozatban  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ , ha  $n > 1$ . Állítsuk elő  $a_n$ -et  $n$  függvényeként!

OKTV 1996/97; II. kategória, I. forduló

**Megoldás:**

A képzési szabályt használva  $a_1 = \frac{2}{3}$ ;  $a_2 = \frac{3}{4}$ ;  $a_3 = \frac{4}{5}$ ; .... Az a sejtésünk, hogy

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.  $n = 1$ -re igaz az állítás és tegyük fel, hogy  $n - 1$ -re is már beláttuk, hogy

$$a_{n-1} = \frac{n}{n+1}.$$

A rekurzív képzési szabály és az indukciós feltétel miatt:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n \cdot (n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

20. Igaz-e, hogy a  $7k + 3$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 123321.)

OKTV 2005/2006; III. kategória, I. forduló

**Megoldás:**

Azok a számok, amelyeknek minden jegye egyenlő, nyilván palindrom számok, ezért keressük ezek között a megfelelő számokat. Az a kérdés, hogy a  $c(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^t)$  alakú számok között milyen  $c$  ( $1 \leq c \leq 9$  egész) esetében kapunk 7-tel osztva 3-t maradékul.

Az 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, .... számok 7-es maradéka 1; 4; 6; 5; 2; 0, a maradékok innentől kezdve periodikusan ismétlődnek. Ha a maradék 1, akkor a  $c$ -t válasszuk 3-nak, ha 4; 6; 5; 2, akkor  $c$  legyen 6; 4; 2; 5. Ekkor a  $c(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^t)$  szám 7-tel osztva 3-t ad maradékul. A nullához nem tudunk alkalmas  $c$ -t választani. Tehát ilyen módon végtelen sok palindrom számot kapunk.

21. Mutassuk meg, hogy ha  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tetszőleges pozitív számok, akkor  $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty$  és  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$  közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív  $c_1, c_2, c_3, \dots$  számok esetén  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$  azt jelenti, hogy az  $s_k = c_1 + c_2 + \dots + c_k$  összegek  $k$  növekedésével minden határon túl nőnek.)

OKTV 2008/2009; III. kategória, 2. forduló

**Megoldás:**

A feladatot indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan  $T$  szám, hogy minden  $k$  természetes számra:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} < T \text{ és } a_1 + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_k}{k^2} < T.$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_i} + \frac{a_i}{i^2} \right) \geq \sqrt{\frac{1}{a_i} \cdot \frac{a_i}{i^2}} = \sqrt{\frac{1}{i^2}} = \frac{1}{i}.$$

Ezt  $i = 1$ -től  $k$ -ig összegezzük és felhasználjuk az indirekt feltételt:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} + a_1 + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_k}{k^2} \right) < T.$$

Ismert, hogy az  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$  harmonikus sor minden határon túl nő, tehát elég nagy  $k$ -ra az összeg nagyobb lesz  $T$ -nél. Ellentmondásra jutottunk, ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

**Megjegyzés:**

A harmonikus sor értékének becslése:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^r + 1} + \dots + \frac{1}{2^{r+1}} \right) > \\ > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2^r \cdot \frac{1}{2^{r+1}} = 1 + (r + 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{r + 3}{2}. \end{aligned}$$

Ez pedig  $r$  növekedésével tetszőlegesen nagy értéket felvehet.

22. Határozzuk meg az  $S = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n + \dots + (n - 1)n$  összeget.

„Ki miben tudós?” vetélkedő 1964; elődöntő feladata

**Megoldás:**

Csoportosítsuk a tagokat, egy csoportba kerülnek azok a tagok, amelyekben az első tényező azonos:

$$S = [1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n] + [2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n] + \dots + (n-1)n =$$

$$S = 1 \cdot (2 + 3 + \dots + n) + 2 \cdot (3 + 4 + \dots + n) + \dots + k \cdot [(k+1) + (k+2) + \dots + n] + \dots$$

Egy ilyen csoport összege:

$$k \cdot [(k+1) + (k+2) + \dots + n] = k \cdot \frac{(n-k)(n+k+1)}{2}.$$

Az  $S$  összeg így alakul:

$$S = \frac{1 \cdot (n-1)(n+2)}{2} + \frac{2 \cdot (n-2)(n+3)}{2} + \frac{3 \cdot (n-3)(n+4)}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{(n-3) \cdot 3 \cdot (2n-2)}{2} + \frac{(n-2) \cdot 2 \cdot (2n-1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot 1 \cdot 2n}{2}.$$

Láthatóan párba állíthatóak a tagok úgy, hogy két-két azonos tényező legyen bennük. Ezért a számtani sorozat összegképletének levezetésénél használt módszerrel:

$$2S = \frac{1 \cdot (n-1)(3n+2)}{2} + \frac{2 \cdot (n-2)(3n+2)}{2} + \frac{3 \cdot (n-3)(3n+2)}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{k \cdot (n-k)(3n+2)}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{(n-3) \cdot 3 \cdot (3n+2)}{2} + \frac{(n-2) \cdot 2 \cdot (3n+2)}{2} + \frac{(n-1) \cdot 1 \cdot (3n+2)}{2} =$$

$$= \frac{3n+2}{2} \cdot (n-1 + 2n-4 + 3n-9 + \dots + nk - k^2 + \dots + (n-1)n - (n-1)^2) =$$

$$= \frac{3n+2}{2} \cdot n \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1)) - \frac{3n+2}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Felhasználjuk az első  $(n-1)$  szám illetve négyzetszám összegére vonatkozó összefüggést:

$$2S = \frac{3n+2}{2} \cdot \left( n \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right) =$$

$$= \frac{(3n+2) \cdot (n-1) \cdot n}{12} \cdot (3n-2n+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (3n+2)}{12},$$

Tehát

$$S = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (3n+2)}{24}.$$

23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges adott  $n$  természetes számhoz megadható végtelen sok 2-hatvány úgy, hogy ezek közül bármely kettőnek a különbsége osztható  $n$ -nel.

„Ki miben tudós?” vetélkedő 1966; döntő feladata

**Megoldás:**

Ha a  $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^k, \dots$  hatványokat  $n$ -nel elosztjuk, akkor a  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  számok valamelyike lehet a maradék. A 2-hatványok száma végtelen, ezért a skatulya-elv szerint van

olyan maradék, amely  $n$ -nel osztva végtelen sok hatványnál fordul elő. E hatványok közül bármely kettő különbsége osztható  $n$ -nel.

24. Legyen

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n},$$

ahol  $n$  pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A, 2A, 4A, \dots, 2^k A, \dots$$

sorozatban van egész szám.

*A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1934. évi 1. feladata*

**Megoldás:**

A törtet bővítjük a  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$  szorzattal:

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot 2n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}.$$

$\binom{2n}{n}$  egész szám, azt adja meg, hogy  $2n$  különböző elemből hányféle módon tudunk  $n$  elemet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít.

Így  $2^n \cdot A$  egész szám.

25. Az  $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$  természetes számok végtelen sorozatában

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$$

minden  $k > 1$  értékre teljesül. Bebizonyítandó, hogy minden természetes szám felírható ebből a sorozatból kiválasztott számok összegeként (vagy pedig előfordul a sorozatban).

*A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1960. évi 2. feladata*

Megjegyzés: A zárójeles toldalék felesleges akkor, ha egytagú összeget is lehetségesnek tartunk. A megoldásban szereplő összegek így értendők.

**Megoldás:**

Azt fogjuk bizonyítani, hogy az  $a_1, a_2, \dots, a_k$  számok segítségével minden olyan  $n$  szám felírható a feladat feltételei szerint, amelyre  $0 < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k$ .

A bizonyításhoz  $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót használunk:

$k = 1$  esetén  $a_1 = 1$ . Ekkor  $n = 1 = a_1$  megfelelő felírás.

Tegyük fel, hogy  $k - 1$ -re ( $k > 1$ ) igaz az állítás, tehát minden  $0$  és  $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$  közé eső szám felírható alkalmas  $a_i$  számok összegeként.

Bizonyítunk  $k$ -ra:

Ha  $0 < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$ , akkor már az  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  számok is elegendőek az indukciós feltétel szerint.

Ha  $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} \leq n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k$ , akkor  $0 \leq n - a_k \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$ .

Ekkor, ha  $0 = n - a_k$ , akkor az  $n = a_k$  felírás megfelelő. Különben  $n - a_k$  az indukciós feltétel miatt felírható az  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  számokból alkalmasan választott összeg formájában. Ehhez hozzáadva az  $a_k$  számot, megkapjuk az  $n$  egy lehetséges felírását.

Teljes indukcióval beláttuk a feladat állítását.

26. Bizonyítandó, hogy nincs olyan, természetes számokból álló végtelen sorozat, amelynek nem minden eleme egyenlő, s amelynek minden eleme (a másodiktól kezdve) a két szomszédos elem harmonikus közepe ( $a$  és  $b$  harmonikus közepe  $\frac{2ab}{a+b}$ ).

*A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1968. évi 1. feladata*

### I. Megoldás:

Ha a sorozat első két eleme  $h_1$  és  $h_2$ , akkor a képzési szabály alapján  $h_3 = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}$ , amiből átrendezéssel

$$\frac{2}{h_3} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \Rightarrow \frac{1}{h_3} = \frac{2}{h_1+h_2} = \frac{2h_1 - h_2}{h_2h_1} \Rightarrow h_3 = \frac{h_2h_1}{2h_1 - h_2}.$$

Hasonlóan számolva

$$h_4 = \frac{h_2h_1}{3h_1 - 2h_2}.$$

Az a sejtésünk, hogy

$$h_n = \frac{h_2h_1}{(n-1)h_1 - (n-2)h_2}, \quad \text{ahol } n \geq 3 \text{ természetes szám.}$$

Ezt az állítást teljes indukcióval tudjuk bizonyítani.

$n = 3$ -ra igaz az állítás.

$k < n$ -re ( $n > 3$ ) feltételezzük, hogy igaz az állítás:

$$h_k = \frac{h_2h_1}{(k-1)h_1 - (k-2)h_2}$$

$n = k + 1$ -re bizonyítunk. A harmonikus közép így is kifejezhető:

$$\frac{2}{h_{k+1}} = \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \Rightarrow \frac{1}{h_{k+1}} = \frac{2}{h_k} - \frac{1}{h_{k-1}}$$

Az indukciós feltételt felhasználva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{k+1}} &= \frac{2(k-1)h_1 - 2(k-2)h_2}{h_2h_1} - \frac{(k-2)h_1 - (k-3)h_2}{h_2h_1} = \\ &= \frac{(2k-2-k+2)h_1 - (2k-4-k+3)h_2}{h_2h_1} = \frac{kh_1 - (k-1)h_2}{h_2h_1}. \end{aligned}$$

Reciprokot véve:

$$h_{k+1} = \frac{h_2h_1}{kh_1 - (k-1)h_2},$$

ezzel sejtésünket beláttuk.

A sorozat  $n$ -edik elemét így is írhatjuk:

$$h_n = \frac{h_2 h_1}{(n-1)(h_1 - h_2) + h_2}$$

Ha  $h_1 = h_2$ , akkor a sorozat minden eleme  $h_1$ -gyel egyenlő, amit a feladat szövege kizár.

Ha  $h_1 \neq h_2$ , akkor a számláló nem nulla állandó, a nevező pedig tetszőlegesen nagy lehet. Így elég nagy  $n$ -re a sorozat eleme 1-nél kisebb lesz, tehát nem lehet természetes szám. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

## II. Megoldás:

A feladat feltételéből következik, hogy

$$\frac{1}{h_n} = \frac{\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}}}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat elemeinek reciprokaiból képzett sorozat számtani sorozat. A természetes számok reciprokai a  $[0,1]$  intervallumba esnek. Ha a számtani sorozat nem állandó, pozitív tagokból áll, akkor lesz tetszőlegesen nagy eleme, ami ellent mond annak, hogy minden eleme egy adott intervallumhoz tartozik.

27. Mennyivel egyenlő  $n$ , ha  $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \dots + [\sqrt[3]{n}] = 2n$  ?

(Az  $[x]$  az  $x$  szám egészrészét jelöli.)

- (A) 29                      (B) 33                      (C) 41                      (D) 49                      (E) 53

*Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, országos forduló*

## I. Megoldás:

Tudjuk, hogy a Gordiusz Matematika Tesztversenyen csak egy jó megoldás van. helyettesítsük be a megadott értékeket. A számolásnál kihasználjuk, hogy ha  $k^3 \leq i < (k+1)^3$  ( $i, k$  természetes számok), akkor  $[\sqrt[3]{i}] = k$ . A 33-mal számolva:

$$\begin{aligned} & [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \dots + [\sqrt[3]{8}] + \dots + [\sqrt[3]{27}] + \dots + [\sqrt[3]{33}] = \\ & = 7 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 66 = 2 \cdot 33, \end{aligned}$$

tehát ez jó megoldás, ezért a helyes válasz a **B**.

## II. Megoldás:

Most nem használjuk ki, hogy öt lehetőség közül kell megtalálnunk a jó választ.

Legyen  $k^3 \leq n < (k+1)^3$  alkalmas  $k$  természetes számra. Ekkor

$$\begin{aligned} S &= [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \dots + [\sqrt[3]{n}] = \\ &= 1 \cdot (2^3 - 1^3) + 2 \cdot (3^3 - 2^3) + \dots + (k-1) \cdot (k^3 - (k-1)^3) + k \cdot (n+1 - k^3) = \\ &= -1^3 - 2^3 - 3^3 - \dots - (k-1)^3 + (k-1)k^3 + k \cdot (n+1 - k^3) = \\ &= 1^3 - 2^3 - 3^3 - \dots - (k-1)^3 - k^3 + k(n+1) \end{aligned}$$

Felhasználjuk a köbszámok összegére vonatkozó összefüggést:

$$S = k(n+1) - \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Azt keressük, hogy milyen  $n$ -re lesz:

$$k(n+1) - \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 2n,$$

$$n \cdot (k-2) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - k$$

Ha  $k = 2$ , akkor a baloldal 0, a jobb oldal 7, tehát nincs megfelelő  $n$ .

Ha  $k \neq 2$ , akkor:

$$n = \frac{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - k}{k-2} = \frac{k^2(k+1)^2 - 4k}{4(k-2)}. \quad (1)$$

Az így kapott értéknek a

$$k^3 \leq \frac{k^2(k+1)^2 - 4k}{4(k-2)} < (k+1)^3 \quad (2)$$

feltételt teljesítenie kell.

Behelyettesítéssel látható, hogy  $k = 1$ -re nem teljesül az egyenlőtlenség,  $k = 3$ -ra igen.

Ha  $k \geq 4$ , akkor csak az első egyenlőtlenséget vizsgálva:

$$4k^3(k-2) \leq k^2(k+1)^2 - 4k$$

$$4k^4 - 8k^3 \leq k^4 + 2k^3 + k^2 - 4k$$

$$3k^3 + 4 < 10k^2 + k$$

feltételnek kellene teljesülnie, de  $k \geq 4$  esetén

$$3k^3 + 4 > 3k^3 = 3k \cdot k^2 \geq 12k^2 > 11k^2 = 10k^2 + k^2 > 10k^2 + k.$$

Így csak  $k = 3$  esetén kapunk megoldást. Ekkor a (2) egyenlőtlenség másik oldala is teljesül. Az (1) összefüggés alapján  $n = 33$ , azaz a **(B)** válasz a helyes.

28. Jelölje  $\{a_n\}$  azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 7-tel osztva 5 maradékot adnak,  $\{b_n\}$  azon pozitív egész számok növekvő sorozatát, melyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak! Mindkét sorozat első eleme legyen a lehető legkisebb! Az  $\{a_n\}$  sorozat első  $n$  elemének az összegét jelölje  $H_n$ , a  $\{b_n\}$  sorozat első  $n$  elemének az összegét jelölje  $\ddot{O}_n$ ! Mennyi  $n$  értéke, ha

$$\frac{H_n}{\ddot{O}_n} = \frac{32}{23} ?$$

- (A) 9                      (B) 18                      (C) 27                      (D) 81                      (E) Nincs ilyen  $n$ .

*Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 12. osztály, megyei forduló*

**Megoldás:**

Mindkét sorozat elemei számtani sorozatot alkotnak. Az adott feltételekkel

$$a_1 = 5; a_n = 7n - 2; b_1 = 4; b_n = 5n - 1.$$

A számtani sorozat összegképlete alapján:

$$H_n = \frac{(5 + 7n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(7n + 3) \cdot n}{2};$$

$$\ddot{O}_n = \frac{(4 + 5n - 1) \cdot n}{2} = \frac{(5n + 3) \cdot n}{2}.$$

Azt keressük, hogy mikor lesz

$$\frac{H_n}{\ddot{O}_n} = \frac{7n + 3}{5n + 3} = \frac{32}{23}.$$

Az egyenletet megoldva  $n = 27$  adódik, tehát (C) a jó válasz.

29. Egy számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-2}}, \quad \text{ha } n = 2; 3; 4; \dots$$

Mennyivel egyenlő az  $x_{2011}$ , ha  $a = \frac{1}{2011}$  és  $b = \frac{1}{2010}$ ?

- (A)  $\frac{1}{2011}$       (B)  $\frac{1}{2010}$       (C) 1      (D) 2010      (E) 2011

*Gordiusz Matematika Tesztverseny 2011; 12. osztály, országos forduló*

**Megoldás:**

A sorozat első néhány tagját felírjuk:

$$x_2 = \frac{b + 1}{a}; \quad x_3 = \frac{\frac{b + 1}{a} + 1}{b} = \frac{a + b + 1}{ab};$$

$$x_4 = \frac{\frac{a + b + 1}{ab} + 1}{\frac{b + 1}{a}} = \frac{a + b + 1 + ab}{b(b + 1)} = \frac{(a + 1)(b + 1)}{b(b + 1)} = \frac{a + 1}{b};$$

$$x_5 = \frac{\frac{a + 1}{b} + 1}{\frac{a + b + 1}{ab}} = \frac{(a + b + 1)ab}{b(a + b + 1)} = a; \quad x_6 = \frac{a + 1}{\frac{a + 1}{b}} = b.$$

Látható, hogy a sorozat tagjai periodikusan ismétlődnek, a periódus hossza 4, ezért

$$x_{2011} = x_1 = \frac{1}{2010}.$$

A helyes válasz: A.



30. Vizsgáljuk meg az  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  sorozatot. Vegyük a szomszédos elemek különbségét, az alábbi módon egy különbségi háromszöget állítsunk elő:

$1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\dots$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{30}$	$\dots$	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\dots$	
	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{60}$	$\dots$		
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\dots$		
		$-\frac{1}{6}$	$\dots$			

Forgassuk el a táblázatot  $60^\circ$ -al úgy hogy az 1-es szám kerüljön a háromszög csúcsába. és hagyjuk el az előjeleket.

			$1$			
		$1$	$1$	$1$	$1$	$1$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ezután minden sor minden elemét osszuk el az illető sor szélén álló számmal és vegyük az eredmény reciprokát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a Pascal-háromszöget kapjuk

			1			
			1	1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

*D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom:  
Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*

*Aritmetika és algebra, 320. feladat*

A Pascal-háromszög a binomiális együtthatókat tartalmazza. Ha a sorokat 0-tól, a sorokon belül az elemeket is 0-tól kezdjük számozni, akkor a Pascal-háromszög  $n$ -edik sorának  $k$ -adik eleme  $C_n^k = \binom{n}{k}$ . A kiindulási számainkban szeretnénk ezt felfedezni:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{C_0^0} & & \frac{1}{2C_1^1} & & \frac{1}{3C_2^2} & & \frac{1}{4C_3^3} & \dots \\
 & & -\frac{1}{2C_1^0} & & -\frac{1}{3C_2^1} & & -\frac{1}{4C_3^2} & \dots \\
 & & & & \frac{1}{3C_2^0} & & \frac{1}{4C_3^1} & \dots \\
 & & & & & & -\frac{1}{4C_3^0} & \dots
 \end{array}$$

Ezt a tulajdonságot teljes indukcióval igazoljuk. Az első sorban igaz az előállítás

Feltételezzük, hogy a  $k$ -edik sorban lévő elemek:

$$\pm \frac{1}{(k+1)C_k^0} \quad \pm \frac{1}{(k+2)C_{k+1}^1} \quad \dots \quad \pm \frac{1}{(k+i)C_{k+i-1}^{i-1}} \quad \pm \frac{1}{(k+i+1)C_{k+i}^i}$$

Ekkor a  $(k+1)$ -edik sorban lévő elemeket így számoljuk ki:

$$\begin{aligned}
& \pm \left( \frac{1}{(k+i+1)C_{k+i}^i} - \frac{1}{(k+i)C_{k+i-1}^{i-1}} \right) = \pm \left( \frac{1}{(k+i+1) \frac{(k+i)!}{i! \cdot k!}} - \frac{1}{(k+i) \frac{(k+i-1)!}{(i-1)! \cdot k!}} \right) = \\
& = \pm \left( \frac{i! \cdot k!}{(k+i+1)!} - \frac{(i-1)! \cdot k!}{(k+i)!} \right) = \pm \left( \frac{i \cdot (i-1)! \cdot k! - (k+i+1)(i-1)! \cdot k!}{(k+i+1)!} \right) = \\
& = \pm \frac{(-k-1)(i-1)! \cdot k!}{(k+i+1)!} = \mp \frac{(k+1)(i-1)! \cdot k!}{(k+i+1)!} = \mp \frac{(k+1)! (i-1)!}{(k+i+1)(k+i)!} = \\
& = \mp \frac{1}{(k+i+1) \binom{k+i}{i-1}} = \mp \frac{1}{(k+i+1) C_{k+i}^{i-1}}
\end{aligned}$$

Ez a képzési szabály öröklődését jelenti a  $(k+1)$ -edik sorra.

Ha elvégezzük a feladatban szereplő átalakításokat, akkor valóban a megfelelő  $C_n^k$  binomiális együtthatókat tartalmazó Pascal-háromszöget kapjuk.