**Dr. Katz Sándor**
**Bonyhádi Petőfi Sándor**
**Evangélikus Gimnázium**

# Matematikai játékok és az aranymetszés

Az előadásban és ebben az írásos ismertetőben is néhány matematikai játékot kívánok bemutatni. Köztük olyanokat is, amelyek szoros kapcsolatban vannak a Fibonacci-számokkal és az aranymetszéssel.

Először két olyan játék-párt mutatok be, amelyekben ha egy kicsit változtatunk a feltételeken, akkor a megoldás módja és nehézsége is jelentősen megváltozik.

**I/*a* Van egy 10 kavicsból álló halmazunk. Egy lépés abból áll, hogy a halmazt két részre bontják. Ketten felváltva lépnek. Az veszít, aki a megengedett lépést már nem tudja elvégezni, tehát az nyer, aki csupa egy kavicsból álló halmazt el tudja érni.**

Minden lépésnél eggyel nő a halmazok száma, tehát mindig 9 osztás után ér véget a játék. Az első, a 3. , és sorban minden páratlanodik osztást, így a 9-ediket is a Kezdő végzi tehát a Kezdő nyer.

**Megjegyzés:**
*Teljesen mindegy hogy az egyes halmokat mekkora részekre osztják a játékosok. Mindig a Kezdő nyer, nem tudja elrontani a lépéseit.*

**I/*b* Van egy *m* kavicsból álló halmazunk. Egy lépés abból áll, hogy a halmazt két részre bontják. Ketten felváltva lépnek. Az veszít, aki a megengedett lépést már nem tudja elvégezni, tehát az nyer, aki csupa egy kavicsból álló halmazt el tudja érni.**

Minden lépésnél eggyel nő a halmazok száma, tehát mindig $m$-1 osztás után ér véget a játék. Az első, a 3. , és sorban minden páratlanodik osztást a Kezdő végzi.
Tehát ha $m$ páros, akkor az $m$-1-edik, tehát utolsó osztást Kezdő végzi ezért ő nyer. r.
Ha $m$ páratlan akkor az utolsó osztást Második végzi.

**I/c Van egy m kavicsból álló halmazunk. Egy lépés abból áll, hogy egy halmazt két *nem egyenlő* részre bont a soron következő. Ketten felváltva lépnek. Az veszít, aki a megengedett lépést már nem tudja elvégezni. (Ez azt jelenti, hogy csak 1 vagy 2 kavicsból álló halmazaink vannak.)**

$m$ =1 és $m$= 2 esetén Kezdő veszít, mert már az első lépést sem tudja megtenni.

$m$= 3 esetén Kezdő tud nyerni, mert 1-2 bontást végez, és ezzel befejeződik a játék.

$m$ = 4 estén Kezdő csak 1-3 bontást végezhet, amelyből Második 1-2- 1 bontással nyer.

*Ha valamely m≥ 4 esetén Második tud nyerni, akkor m+1 és m+2 esetén Kezdőnek van nyerő stratégiája, hiszen 1-m ill. 2-m bontással olyan helyzetet hoz létre, amelyből a lépni következő, tehát Második veszít.* **(*)**

Eszerint $m$= 5 és $m$ =6 esetén Kezdő nyer.

$m$=7 esetén Kezdő háromféleképp kezdhet. 1-6 és 2-5 bontással az előző pont szerint vesztő helyzetbe kerül. Kezdő 3-4 bontásánál Második 1-2-4-re bont. Ezután Kezdő csak 1-2-1-3-at tud bontani, amiből Második 1-2-1-1-2 bontással nyer.

$m$= 8 és $m$ =9 esetén Kezdő **(*)** szerint nyerni tud.

$m$ = 10 esetén Kezdő szintén háromféleképp kezdhet. 1-9 és 2-8 bontással az előző pont szerint vesztő helyzetbe kerül. Kezdő 4-6 bontásánál Második 4-2-4-re bont. Ezután amit Kezdő csinál az egyik 4-es halommal, Második azt utánozza a másikkal, ezért ő nem veszít.. Mivel a játék véges sok lépésben befejeződik ezért Második nyer.

$m$= 11 és $m$ =12 esetén Kezdő ismét **(*)** szerint nyerni tud.

Itt már sejteni lehet egy szabályosságot: $m$ = 1, 2 és minden $m$=3$k$ +1 alakú számra Második nyer, a többi számra Kezdő.

Sajnos ez nem igaz.

Már 13-ra sem működik. Itt a sejtéstől eltérően Kezdő tud nyerni.
Kezdő 5-8 bontással kezd.
Második 5-1-7 bontására Kezdő 1-4-7-1 bontással két nyerő halmazt hoz létre.
Második 5-2-6 bontására Kezdő 5-2-1-5-re bont és „utánzással"
Második 5-3-5 bontására Kezdő szintén 5-2-1-5-re bont.
Második 4-1-8 bontására Kezdő szinté 4-1-7-1 bontással nyer.
Második 2-3-8 bontására Kezdő 6-2-2-3 bontással válaszol.

Erre Másodiknak háromféle válasza lehet, de mindegyikre van Kezdőnek nyerő bontása:
4-2-2-2-3 ⇒ 4-2-2-2-1, 5-1-2-2-3 ⇒ 3-2-1-2-3, 6-2-2-1 ⇒ 4-2-2-2-1.

**Megjegyzések**
Ha nem kötjük ki, hogy különböző részekre kell bontani a halmazt, akkor a játék igen könnyű, ill. nem is igazán érdekes, mert bármilyen játék esetén a kezdetben kedvező helyzetű játékos nyer.

Az a látszólag kis nehezítés, hogy nem lehet két egyenlő részre bontani a halmokat, teljesen megváltoztatja a játékot. Olyannyira, hogy **tetszőleges *m*-re az általános megoldás nem is ismert.**
$m$=1, 2, 4, 7, 10, 20, 23, 26 esetén Második nyer, de a következő Második számára kedvező $m$ értékek már jóval nagyobbak: 50, 53, 270, 273, 276, …
$m$ = $2^{38}$-ig összesen 42 Második számára kedvező helyzet ismert.

**II/*a*** **Ketten felváltva mondanak egész számokat. Az első 1-gyel kezd, a második ezt megnövelheti 1-gyel vagy 2-vel, és így tovább: a következő játékos mindig legalább 1-gyel, de legfeljebb az előzőleg elért szám kétszeresével növelheti az eddig elért számot. Az nyer, aki a 100-at eléri. Ki tud nyerni, a Kezdő vagy a Második? Milyen számokat kell sorban mondani annak, aki nyerni tud?**

Haladjunk visszafelé! Ha X 33-at tud mondani, akkor nyer, mert a másik: Y még nem tudja elérni a 100-at, de legalább 34-et kell mondania, és ekkor X már tud 100-at mondani.
Visszafelé haladva: aki 10-et mond, az tudja elérni a 33-at. Aki 3-at mond az tudja elérni a 10-et. Tehát a második nyer, és a kezdő 1-es száma után rendre a 3, 10, 33, 100 számokat mondja.

**II/*b* Ketten felváltva mondanak egész számokat. Az első 1-gyel kezd, a második ezt megnövelheti 1-gyel vagy 2-vel, és így tovább: a következő játékos mindig legalább 1-gyel, de legfeljebb az előzőleg elért szám kétszeresével növelheti az eddig elért számot. Az nyer, aki egy adott *m* számot el tud érni. Vizsgáljuk, meg, hogy különböző *m* értékeknél ki tud nyerni, a Kezdő vagy a Második?**

Most is gyűjtsük össze azokat a számokat, amelyeket a Kezdő ill. a Második biztosan, (tehát a másik lépéseitől függetlenül) el tud érni, és jelöljük ezek halmazát K-val és M-mel!

A Kezdő az első lépésben csak 1-et mondhat. Második erre már 2-t vagy 3-at is mondhat. Függetlenül attól, hogy Második mit mondott, a Kezdő a második lépésben mondhat 4-et, 5-öt, vagy 6-ot. Ennél nagyobbat már nem biztos, hiszen ha a Második 2-t mondott, akkor a Kezdő 6-nál nagyobb számot nem mondhat.

Második a 2. lépésében már az eddigi számokat nem biztos, hogy mondhatja, de 7-et már biztosan mondhat, függetlenül attól, hogy Kezdő 4-et, 5-öt, vagy 6-ot mondott. 7-től meddig terjedhetnek azok a számok, amelyeket Második a 2. lépésben mondhat. A felső határt Kezdő előző lépésének legkisebb lehetséges értéke határozza meg. Ha kezdő az előző lépésében 4-et mondott, akkor Második 2. száma legfeljebb $4 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$ lehet.

Ezzel már eljutottunk a két halmaz felépítésének módszeréhez. Foglaljuk táblázatba, hogy az egyes lépésekben milyen számokat mondhat ki biztosan Kezdő és Második!

| Lépésszám: | Kezdő biztosan mondhatja: | Kezdő számainak száma: | Második biztosan mondhatja | Második számainak száma: |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 1 | 2, 3 | 2 |
| 2. | 4, 5, 6 | 3 | 7, 8, 9, … ,12. | 6 |
| 3. | 13, 14, …, 21 | 9 | 22, 23, … , 39 | 18 |
| 4. | 40, 41, …, 66 | 27 | 67, 68, …, 120 | 54 |
| 5. | 121, 122, … 201 | 81 | 202, 203, …, 363 | 162 |
| . . . | | | | |
| *n*. | | $3^{n-1}$ | | $2 \cdot 3^{n-1}$ |

Ebből a táblázatból már $m \le 363$ esetén meg tudjuk állapítani, hogy az $m$ célszámot Kezdő vagy Második tudja elérni. Egy adott $m$ érték esetén az előző nyerőszámot az a legnagyobb $k$ szám adja, amelynek háromszorosa még kisebb $m$-nél. $\left(\text{Képlettel: } k = \left[\frac{m-1}{3}\right].\right)$ Ugyanezzel a szabállyal kaphatjuk az egyre kisebb nyerőszámokat. A táblázat képzési szabályából látható, hogy az mindig az adott oszlopban (halmazban) marad. Pl. az előző feladat *m*= 100 célszáma a Második által biztosan kimondható számok halmazában van, tehát, mint láttuk, a második tud nyerni a nyerőszámok visszafelé haladva: $\left[\frac{100-1}{3}\right]=33,\ \left[\frac{33-1}{3}\right]=10,\ \left[\frac{10-1}{3}\right]=3.$

Teljes indukcióval beláthatjuk, hogy az n-edik lépésben Kezdő biztosan mondhatja a

$\frac{3^n-1}{2},\ \frac{3^n+1}{2},\ \frac{3^n+3}{2},\ \ldots,\ \frac{2\cdot 3^n-3^{n-1}-3}{2}$ számokat. Ezek száma $3^{n-1}$.

Második biztosan mondhatja a

$\frac{2\cdot 3^n-3^{n-1}-1}{2},\ \frac{2\cdot 3^n-3^{n-1}+1}{2},\ \frac{2\cdot 3^n-3^{n-1}+3}{2},\ \ldots,\ \frac{3^{n+1}-3}{2}$ számokat. Ezek száma $2\cdot 3^{n-1}$.

Ebből pl. ha az *m* =10 000 célszámot akarjuk elérni, akkor a $\frac{3^n-1}{2}\le 10000\le\frac{3^{n+1}-3}{2}$ egyenlőtlenségből láthatjuk, hogy ennek megoldása n=9, ezért a 10 000 a táblázat 9-edik sorában szerepel, tehát az n= 9. lépésben tudjuk elérni. Mivel $\frac{3^9-1}{2}\le 10000\le\frac{2\cdot 3^9-3^8-3}{2}$, ezért a 10 000 a Kezdő által biztosan kimondható számok között szerepel, tehát ezt a Kezdő tudja elérni. Visszafelé haladva az

$$\left[\frac{10000-1}{3}\right]=3333,\ \left[\frac{3333-1}{3}\right]=1110,\ \left[\frac{1110-1}{3}\right]=370,\ \left[\frac{370-1}{3}\right]=123,\ \left[\frac{123-1}{3}\right]=41,\ \left[\frac{41-1}{3}\right]=13,\ \left[\frac{13-1}{3}\right]=4,\ \left[\frac{4-1}{3}\right]=1.$$

számok kimondásával.

**Megjegyzés**
Természetesen mindkét fent játékunknál játszhatunk fordított sorrendben is, úgy hogy 100, ill. *m* kavicsból veszünk el először 1, másodszor 1 vagy 2 kavicsot, és a továbbiakban mindig legfeljebb az összesen addig elvett kavicsoknak a kétszeresét lehet elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

**Módosítsuk most egy kicsit ezt a játékot is úgy, hogy a második lépéstől nem az összes addig elvett kavicsok kétszeresét, hanem csak az utolsó lépésben elvett kavicsok kétszeresét lehet elvenni. Ez a kis módosítás most is teljesen megváltoztatja a feladatot.**

**II/c Az asztalon van *m* (>1) kavics. Ezekből ketten felváltva vesznek el. Első lépésben Kezdő akárhány kavicsot elvehet, de nem veheti el mindet. Ezután miden játékos legfeljebb kétszer annyi kavicsot vehet el, mint amennyit a partner az előző lépésben elvett. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Milyen *m* esetén tud nyerni a Kezdő, ill. a Második?**

Nézzük meg néhány *m*-re ki tud nyerni. A nyerő lépést vastag betűvel írjuk.

| Az asztalon van *m* | Kezdő elvesz | Második elvesz | Kezdő elvesz | Második elvesz | Kezdő elvesz | Második elvesz | Kezdő elvesz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2 - M. nyer* | 1 | **1** | | | | | |
| *3 – M. nyer* | 1 | **2** | | | | | |
| | 2 | **1** | | | | | |
| 4 - *K. nyer* | 1 | 1 | **2** | | | | |
| | | 2 | **1** | | | | |
| *5 M. nyer* | 1 | 1 | 1 | **2** | | | |
| | | | 2 | **1** | | | |
| | 2 | **3** | | | | | |
| | 3 | **2** | | | | | |
| | 4 | **1** | | | | | |
| 6 – *K. nyer* | 1 | 1 | 1 | 1 | **2** | | |
| | | | | 2 | **1** | | |
| | | 2 | **3** | | | | |
| 7 – *K. nyer* | 2 | 1 | 1 | 1 | **2** | | |
| | | | | 2 | **1** | | |
| | | 2 | **3** | | | | |
| | | 3 | **2** | | | | |
| | | 4 | **1** | | | | |
| 8 - *M. nyer* | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | **2** | |
| | | | | | 2 | **1** | |
| | | | 2 | **3** | | | |
| | | | 3 | **2** | | | |
| | | | 4 | **1** | | | |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | **2** | |
| | | | | | 2 | **1** | |
| | | | 2 | **3** | | | |
| | 3 | 5 | | | | | |
| | 4 | | | | | | |
| | 5 | **4** | | | | | |
| | 6 | **3** | | | | | |
| | 7 | **2** | | | | | |
| | 8 | **1** | | | | | |
| 9 – *K. nyer* | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | **2** |
| | | | | | | 2 | **1** |
| | | | | 2 | **3** | | |
| | | | | 3 | **2** | | |
| | | | | 4 | **1** | | |
| | | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | **2** |
| | | | | | | 2 | **1** |
| | | | | 2 | **3** | | |

Azt látjuk, hogy ha kezdetben 2, 3, 5 vagy 8 kavics van az asztalon, akkor Második nyer.
4, 6, 7, 9 kavicsnál a Kezdő.

A 2, 3, 5, 8 számok ismerősek. Ezek a **Fibonacci-számok**. Ahhoz, hogy be tudjuk látni, hogy **Fibonacci-számok** esetén Második nyer, nézzünk néhány tételt ezekre a számokra.

Az $f_1=1$, $f_2=1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n\geq 3$, rekurzióval megadott sorozatot szokás Fibonacci-sorozatnak nevezni. Mi a továbbiakban különböző Fibonacci-számokat akarunk szerepeltetni, és a sorozatban az első két elem megegyezik, ezért a szokásostól eltérően a továbbiakban az első 1-est elhagyva az

$$f_1=1,\quad f_2=2,\quad f_3=3,\quad f_4=5,\quad f_5=8,\quad f_6=13,\quad f_7=21,\quad f_8=34,\quad f_9=55,\quad \ldots.$$

sorozatot fogjuk használni, ebben a feladatban a Fibonacci-sorozatnak ezt számozását alkalmazzuk.

Először megmutatjuk, hogy a **Fibonacci-számokra** teljesül a következő állítás:

**Minden $n\geq 3$-ra**

$$\boldsymbol{f_{n-1} < 2(f_n - f_{n-1}) = 2f_{n-2} \quad (*.)}$$

Valóban $f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3} < 2f_{n-2} = 2(f_n - f_{n-1})$.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy minden pozitív egész szám felírható különböző **Fibonacci-számok** összegeként.

Ha $n$ Fibonacci-szám akkor $n$ egytagú összegként írható fel.

Ha $n$ nem Fibonacci-szám akkor legyen $f_k$ a legnagyobb olyan Fibonacci-szám amely kisebb $n$-nél, azaz $f_k < n < f_{k+1}$. $f_k$ lesz az $n$-t előállító összeg első tagja. Mi lesz a következő tag?

Ezután az $n- f_k$ számot fogjuk felírni Fibonacci-számok összegeként. Lehetséges-e hogy ebben $f_k$ újra szerepel? Ez nem lehet, mert a Fibonacci számok definíciója szerint $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$, de $n < f_{k+1}$, ezért $n- f_k < f_{k-1}$. Tehát nemcsak $f_k$ nem szerepelhet a további tagok között, hanem még $f_{k-1}$ sem.

Ezt az eljárást folytatva a $n$ szám felírható olyan különböző Fibonacci-számok összegként, amely összegben nem szerepelnek szomszédos Fibonacci-számok sem.

*Például az 50 felírásához a fentiek szerint eljutunk a következő módon:*

50 nem Fibonacci-szám, az őt közvetlenül megelőző Fibonacci-szám a 34, ezért ez lesz az összeg első tagja.

50-34=16 sem Fibonacci-szám, a 16-ot megelőző Fibonacci-szám a 13, ez lesz a következő tag.

16-13=3, ez Fibonacci-szám, ezért ez lesz a következő, és egyben utolsó tag.

Tehát 50 = 34 + 16 + 3.

Másként $50 = 1\cdot 34 + 0\cdot 21 + 1\cdot 13 + 0\cdot 8 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1$

Ez a felírás nagyon hasonlít a 2-es számrendszerhez, ezért ha ezt átírjuk

$$50 = 10100100_F$$

alakba, akkor ezt tekinthetjük a szám ***Fibonacci-számrendszer***ben felírt alakjának.

A fenti konstrukciós bizonyítás megmutatta, hogy minden számnak létezik ilyen ***Fibonacci-számrendszer***ben felírt alakja, vagy röviden ***Fibonacci-alakja.***

**(**) Tetszőleges *n* szám *Fibonacci-alakja* csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz, 1-essel kezdődik, és nincs benne két szomszédos 1-es.**

Nyilvánvaló a kérdés: egyértelmű-e ez a felírás? Azaz lehetséges-e egy *n* számnak kétféle *Fibonacci-alakja?*

Megmutatjuk, hogy a *Fibonacci-alak* egyértelmű.
Előtte teljes indukcióval belátjuk a következő segédtételt:

**A legkisebb *k* jegyű *Fibonacci-alak* nagyobb, mint a legnagyobb *k*-1 jegyű *Fibonacci-alak.***
Megmutatjuk, hogy pontosan 1-gyel kisebb.
Ha *k* páros akkor

$$f_k - 1 = f_{k-1} + f_{k-3} + f_{k-5} + \dots + f_1, \qquad (1.)$$

vagy ha *k* páratlan, akkor

$$f_k - 1 = f_{k-1} + f_{k-3} + f_{k-5} + \dots + f_2. \qquad (2.)$$

$k = 2$ –re az állítás igaz, mert $f_2 - 1 = f_1$,
$k = 3$ –ra az állítás igaz, mert $f_3 - 1 = f_2$,
$k = 4$ –re az állítás igaz, mert $f_4 - 1 = f_3 + f_2 - 1 = f_3 + f_1$,
$k = 5$ –re az állítás igaz, mert $f_5 - 1 = f_4 + f_3 - 1 = f_4 + f_2$.

Tegyük fel, hogy az (1.) és (2) állítás igaz valamely páros $k > 2$- ig minden számra!

Megmutatjuk, hogy az állítás igaz $k$+1-re is, azaz $f_{k+1} - 1 = f_{k-} + f_{k-2} + f_{k-4} + \dots + f_2$.

$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ és az indukció-feltevés szerint $f_{k-1} - 1 = f_{k-2} + f_{k-4} + \dots + f_2$.
Ezekből következik, hogy $f_{k+1} - 1 = f_{k-} + f_{k-2} + f_{k-4} + \dots + f_1$ .
Tehát egy *k* páros szám után igaz a következő páratlan számra.
Ugyanígy látható be, hogy egy páratlan szám után igaz a következő párosra.

Vizsgáljuk meg, hogy lehetséges-e hogy egy *n* pozitív egész számnak van kétféle ***Fibonacci-alakja?***

Az előző tételünk szerint az egyik felírás nem lehet több jegyű, mint a másik, mert a több jegyű szám nagyobb.

Lehet-e két egyaránt *m* jegyű ***Fibonacci-alak*** egymással egyenlő?

Pl. lehet-e egyenlő $10010\mathbf{1}000000000_F$
és $10010\mathbf{0}101010101_F$ ?

Vizsgáljuk elölről a számjegyeket. Mindegyik szám 1-gyel kezdődik. Ha a két szám nem egyenlő, akkor jobbra haladva lesz egy első olyan hely, ahol a két számjegy nem egyezik meg, azaz egyikben 1-es a másikban 0 áll. Legyen ez a hely jobbról a *k*-adik.

Ekkor mindkét szám felírható két szám összegeként, ahol az első tag mindegyikben az első ***m-k*** jegynek megfelelő $1 \cdot f_m + 0 \cdot f_{m-1} + \ldots + 0 \cdot f_{k+1}$ összeg a második tag pedig az utolsó *k* jegynek megfelelő összeg. De ez abban a számban, amelyben jobbról a *k*-adik helyen 1-es van, egy *k* jegyű ***Fibonacci-alak,*** míg a másikban egy *k*-nál kevesebb jegyű ***Fibonacci-alak*** van. Azt viszont már beláttuk, hogy ekkor az első szám nagyobb.

**Második bizonyítás: (Vázlat.)**

Legyen *n* a legnagyobb *k* jegyű ***Fibonacci- alak:***

$$n = f_{k-} + f_{k-2} + f_{k-4} + \ldots +$$

Mutassuk meg, hogy a legfeljebb *k* jegyű különböző **Fibonacci-alakok** száma éppen

$$f_{k-} + f_{k-2} + f_{k-4} + \ldots +$$

Ezt teljes indukcióval megmutathatjuk.

Ha 1-től ***n***-ig minden szám felírható ***Fibonacci-alakban,*** és ha minden legfeljebb *k* jegyű különböző Fibonacci-alakhoz tartozik egy természetes szám, és ezek száma éppen ***n,*** akkor szükségképpen különböző ***Fibonacci-alakokhoz*** különböző értékek tartoznak.

Nézzük meg néhány természetes szám ***Fibonacci-alakját!***

$34 = 10000000_F$
$54 = 10101010_F$
$50 = 10100100_F$
$47 = 10100000_F$

Nyílván a **Fibonacci számok** csak egy 1-est tartalmaznak, a többi jegy 0.
A **Fibonacci számok** kisebb szomszédjaiban az 1 és 0 jegyek felváltva következnek.

Mikor állhat sok 0 a szám végén?

***g*** alapú számrendszerben, ha a szám végén *k* db 0 áll, akkor a szám osztható $g^k$-nal.
A Fibonacci-alaknál ilyen oszthatósági tulajdonság nem teljesül.

Az alábbi tétellel egy becslést adhatunk arra hogy egy természetes szám ***Fibonacci-alakjában*** milyen nagy lehet a legkisebb nem 0 tag

**(***)** **Legyen $f_n$ Fibonacci szám és *d* egy nála kisebb pozitív egész. Az $f_n$ - *d* szám *Fibonacci alak*jában a legkisebb nem 0 tag nem lehet nagyobb, mint 2*d*.**

Indirekt úton bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy $f_n - d = f_{k_1} + f_{k_2} + ... + f_{k_r}$ ahol $n > k_1 > k_2 > \ldots > k_r$ , és . $\left[\frac{f_{k_r}}{2}\right] \geq d$ .

Ebből $f_n \leq f_{k_1} + f_{k_2} + ... + f_{k_r} + \left[\frac{f_{k_r}}{2}\right]$ (3. )

Mivel a **Fibonacci számokra** $i \geq 3$-ra $f_{i-2} < \frac{f_i}{2} < f_{i-1}$ ezért $\left[\frac{f_{k_r}}{2}\right]$ ***Fibonacci alakjának***

legnagyobb tagja $f_{k_r-2}$ . Ezért (3) jobb oldalának ***Fibonacci-alakját*** megkapjuk, ha $\left[\frac{f_{k_r}}{2}\right]$

helyére beírjuk az ő ***Fibonacci-alakját***.

Ekkor (3.) jobboldala egy $f_n$-nél nem kisebb szám ***Fibonacci-alakja*** lenne, tehát ebben a legnagyobb tag $f_n$ vagy egy ennél nagyobb **Fibonacci-szám** lenne. Ez azonban nem lehet, mert $k_1 < n$.

Most már rátérünk annak bizonyítására, hogy ha játékunkban az asztalon kezdetben a kavicsok száma **Fibonacci-szám**, akkor Második nyer.

Legyen kezdetben a kavicsok száma $m \geq 3$.

Ha $m$ **Fibonacci-szám,** azaz $m=f_n$, akkor (*) **tétel**ünk szerint $f_{n-1}$ ,< $2(f_n - f_{n-1}) = 2f_{n-2}$. Ezért ha Kezdő elvesz $f_{n-2}$ kavicsot, azaz $f_{n-1}$ kavicsot hagy az asztalon, akkor Második rögtön elveheti az összes megmaradt kavicsot. Természetesen ez igaz akkor is, ha Kezdő $f_{n-1}$-nél kevesebb kavicsot hagy az asztalon.

Tehát Kezdő első lépésében egy $f_{n-1}$ és $f_n$ közötti $m_1$ számra kell, hogy lépjen.

$m_1$ nem **Fibonacci-szám**, ezért **Fibonacci-alakja** legalább kéttagú, amelyben a legnagyobb tag $f_{n-1}$. Legyen $m_1$ felbontásában a két legkisebb tag $f_j$ *és* $f_i$ $(j<i)$. Lehet persze, hogy nincs is más tag ezeken kívül. Írjuk fel $m_1$ –et a következő alakban $m_1 = S + f_i + f_j$ , ahol $S$ a többi $f_i$–nél nagyobb tag összege . (Ha van ilyen.)

Megmutatjuk, hogy ezután Másodiknak mindig van olyan lépése, amely után Kezdő nem veheti el az összes kavicsot. Mivel a játék véges sok lépésben véget ér, ezért valóban Második nyer.

Második vegye el $m_1$ **Fibonacci-alakjának** legkisebb tagját $f_j$-t!
Megteheti ezt?
Legyen $d = m - m_1$. **(***) tétel** szerin $m-d = m_1$ felbontásában a legkisebb tag nem lehet nagyobb $2d = 2(m-m_1)$-nél, azaz az első lépésben elvett kavicsok számánál.

Így marad $m_2 = S + f_i$ kavics az asztalon. De

$$f_i = f_{i-1} + f_{i-2} > 2 f_{i-2} \geq 2f_j .$$

Ezért Kezdő $m_2$ –ből csak $f_i$ –nél kevesebb kavicsot tud elvenni, tehát nem tudja elvenni az összest.

Ezután Második megint az asztalon levő kavicsok számának **Fibonacci-alakjából** a legkisebb tagot veszi el, és Kezdő megint nem vehet el az összes kavicsot.

Ha a kavicsok eredeti *m* száma nem **Fibonacci-szám**, akkor Kezdő alkalmazhatja azt a taktikát, hogy *m* **Fibonacci-alakjából** a legkisebb tagot veszi el, és így most ő tud nyerni.

Nézzünk néhány példát!

Legyen $m$=8. Ez **Fibonacci-szám** szám, tehát itt Második tud nyerni.

Kezdő első lépésben csak 1 vagy 2 kavicsot vehet el.
Ha először 1-et vesz el, akkor $m_1$= 7 = $1010_F$
Ekkor Második elveszi a az utolsó nem 0 tagot, 2-t. Ekkor $m_2$=5
Ebből Kezdő másodszor elvehet 1-et ⇒ $m_3$=$101_F$,
Második megint elveszi az utolsó nem 0 tagot, 1-et. ⇒ $m_4$=$100_F$ = 3
Ebből Kezdő akár 1-et akár 2-t vesz el, Második már egy lépésben nyerni tud.
Ha Kezdő másodszorra 2-t, 3-at vagy 4-et vesz el, akkor Második azonnal nyer 3, 2 ill. 1 kavics elvételével

Ha Kezdő először 2-t vesz el, akkor $m_1$= 6 = $1001_F$
Ekkor Második elveszi az utolsó nem 0 tagot, 1-et. Ekkor $m_2$=5
Ebből Kezdő másodszor elvehet 1-et ⇒ $m_3$=$101_F$,
Második megint elveszi az utolsó nem 0 tagot, 1-et. ⇒ $m_4$=$100_F$ = 3
Ebből Kezdő akár 1-et akár 2-t vesz el, Második már egy lépésben nyerni tud.
Ha Kezdő másodszorra 2-t vesz el, akkor Második azonnal nyer 3 kavics elvételével

Legyen $m$=9. Ez nem **Fibonacci-szám** szám, tehát itt Kezdő tud nyerni.

$m$=9 = $10001_F$. Ebből Kezdő elveszi az utolsó nem 0 tagot, 1-et. Ekkor $m_1$=8

Ebből Második csak 1 vagy 2 kavicsot vehet el, és innen ismétlődik az előző feladat a két játékos felcserélésével, Kezdő nyer.

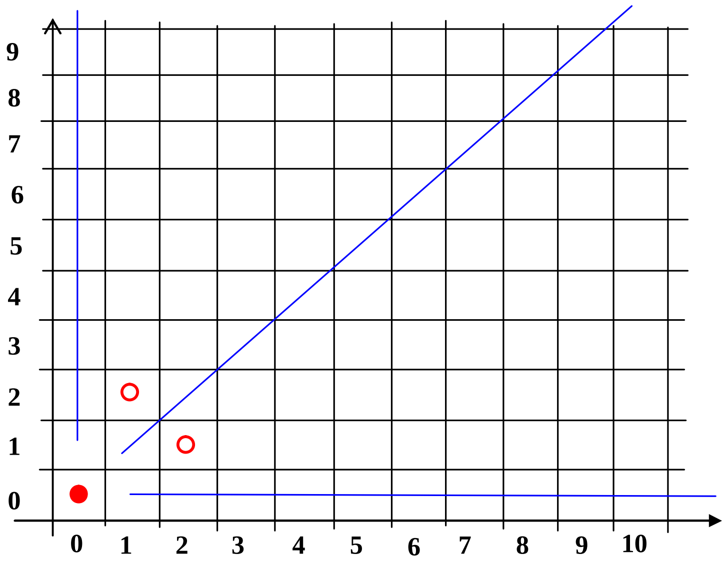
*A következő két feladat elemzésében az aranymetszés arányához jutunk el.*

**III/*a* Két halomban kavicsok vannak. Ketten felváltva vesznek el a két halomból. Egy lépésben az egyik halomból lehet elvenni akárhány kavicsot, vagy a másik halomból lehet elvenni akárhány kavicsot, vagy a két halomból ugyanannyi kavicsot lehet elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ki tud nyerni a kezdő, vagy a második?**

A játék vizsgálata előtt vizsgáljuk a következő játékot!

**III/b Egy tetszőleges méretű sakktáblán valahova elhelyezünk egy vezért. A bábuval ketten felváltva lépnek és az nyer, aki a bal alsó sarokba viszi a bábut. Távolodni nem szabad. Ki tud nyerni?**

Ábrázoljuk a nyerő mezőket!

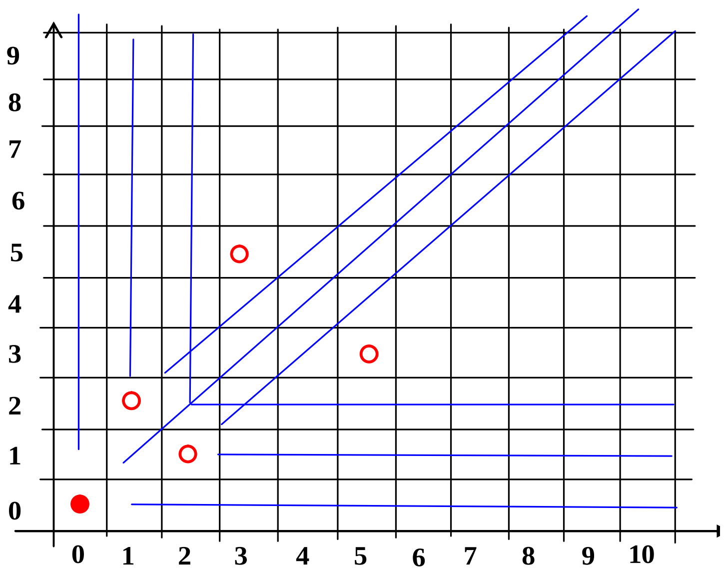



Célszerű az ábra szerint számozni a sorokat és az oszlopokat.

Ha a mezőknek koordinátákat adunk az ábra szerint, akkor a (0;0) mező elérése a cél.

Ha valaki a (0;*k*) (*k*;0) vagy (*k*;*k*) mezők bármelyikére lép, (ahol $k>0$) akkor veszít, mert a másik egy lépésben a célba tud lépni.

Látható, hogy az (1;2) és (2;1) mezőkről csak vesztő mezőkre lehet lépni. Tehát aki e két mező valamelyikére lép, az nyerni tud, tehát ezek nyerő mezők.




Az előzőhöz hasonlóan megkeressük azokat a mezőket, amelyekről az (1;2) és (2;1) mezőkre lehet lépni. Aki ilyen mezőre lép, az a partner jó játéka esetén veszít, tehát ezek vesztő mezők. Ilyenek lesznek az

- (1;*k*) mezők, ahol $k \geq 3$,
- (*k*;1) mezők, ahol $k \geq 3$,
- (2;*k*) mezők, ahol $k \geq 2$,
- (*k*;2) mezők, ahol $k \geq$,
- (*k*;*k*+1) mezők, ahol $k \geq 2$,
- (k+1;*k*) mezők, ahol $k \geq 2$,

Ha ezeket a vesztő mezőket mind „kihúzzuk”, (kékkel jelöljük), akkor a látható, hogy az (3;5) és (5;3) mezőkről csak vesztő mezőkre lehet lépni. Tehát ezek a következő nyerő mezők.

Ezt az eljárást folytatva meghatározhatjuk a további nyerő mezőket.
Az ábránk szimmetrikus az átlóra, ($y=x$ tengelyre,) ezért ha az $(x;y)$ nyerő mező, akkor az $(y;x)$ is nyerő mező. A következő táblázatban felsoroljuk az n-edik lépésben meghatározható $(a_n; b_n)$ nyerő mezőket. (Csak az $a_n \leq b_n$ párokat soroljuk fel.)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | … |
| $b_n$ | 0 | 2 | 5 | 7 | 10 | 13 | 15 | … |

Milyen szabályosság fedezhető fel a táblázatban, hogyan lehetne megadni az összes nyerő mező koordinátáit?

A táblázatból láthatjuk, hogy $b_n - a_n = n$.
Ez valóban mindig így lesz, mert a sakktábláról „kitöltésénél” látható, hogy az első lépésben az $y$-$x$=0 átlót, a másodikban az $|y-x|$=1 átlókat, az $n$-edikben az $|y-x| = n$, átlókat húzzuk ki.*)*

A következő észrevétel, hogy $a_n$ mindig a legkisebb olyan szám, amely eddig nem fordult elő.
Ez is nyilvánvaló, a nyerő mezők megtalálásából, hiszen a következő nyerő mező az első még ki nem húzott oszlopban fog szerepelni. Tehát minden pozitív egész szám elő fog fordulni, sőt pontosan egyszer fordul elő.

A fenti két észrevételből már a következő $(a_n; b_n)$ nyerő pár már mindig egyértelműen előállítható.
(Pl. a 7. nyerő mező első koordinátája a legkisebb olyan természetes szám, amely a táblázatban eddig nem fordult elő. A táblázatból látható, hogy ez $a_7$= 11. Mivel a 7. párt keressük, ezért a második koordináta ennél 7-tel nagyobb: $b_7$=18.)

Tehát rekurzív módon az összes nyerő helyzetet megadtuk.

**Megjegyzések, észrevételek**

**1. A nyerő helyzetek egy érdekes tulajdonsága**

Ha az előző rekurzív módszerrel kiszámoljuk az $(a_n; b_n)$ nyerő párokat, akkor érdemes azok $b_n/a_n$ hányadosát is kiszámolni.

| n | a | b | b/a | n | a | b | b/a |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2.0000 | 200 | 323 | 523 | 1.6192 |
| 2 | 3 | 5 | 1.6667 | 300 | 485 | 785 | 1.6186 |
| 3 | 4 | 7 | 1.7500 | 400 | 647 | 1047 | 1.6182 |
| 4 | 6 | 10 | 1.6667 | 500 | 809 | 1309 | 1.6180 |
| 5 | 8 | 13 | 1.6250 | 1000 | 1618 | 2618 | 1.6180 |
| 10 | 16 | 26 | 1.6250 | 2000 | 3236 | 5236 | 1.6180 |
| 20 | 32 | 52 | 1.6250 | 5000 | 8090 | 13090 | 1.6180 |
| 200 | 323 | 523 | 1.6192 | 10000 | 16180 | 26180 | 1.6180 |

Azt látjuk, hogy $n$ növekedésével $b_n/a_n$ közelít 1,6180-hoz. Ez az aranymetszés arányszámának 4 tizedes jegyre való közelítése.

Miért igaz, hogy $\frac{b_n}{a_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\approx 1{,}618033)$ ?

Tekintsük a sakktábla N x N -es részén az ($a_n$ ; $b_n$) *és* ($b_n$ ; $a_n$) koordinátájú nyerő helyzeteket.
n=1, 2, 3, … ,N
Minden oszlopban pontosan egy ilyen mező van. Legyen közülük $p=A_n$/N az átló felett, $q=B_n$/N az átló alatt levők gyakorisága: *p+q=1 (*)*
Másképp: Minden $u$=1/$p$ –edik szám az $a_n$-ek, és minden $v$=1/$q$ –edik szám a $b_n$-ek közül való. Ezért elég nagy n-ekre: $a_n \approx un$ és $b_n \approx vn$, *így*
$b_n - a_n = vn - un = n$. *(**)*
*Az (*) és (**)* egyenletekből az $1/u + 1/v = 1$, $v - u = 1$ egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása: $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $v = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ebből $b_n / a_n = v/u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\approx 1{,}618033)$

**2. megjegyzés**
Megmutatható, hogy az $n$-edik nyerő mező koordinátáit az

$$a_n = \left[ n \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] \text{ és } b_n = \left[ n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right],$$

képletek adják, ahol [$x$] az $x$ szám egészrésze.
(Lásd. Pl. [2.] vagy [3.] szakirodalmak)

**3. megjegyzés:**
A nyerő mezők koordinátáinak vizsgálatából látható, hogy ez a feladat teljesen ekvivalens a III/*a* feladattal. A két halomban levő kavicsok számát éppen a mezők két koordinátája adja.

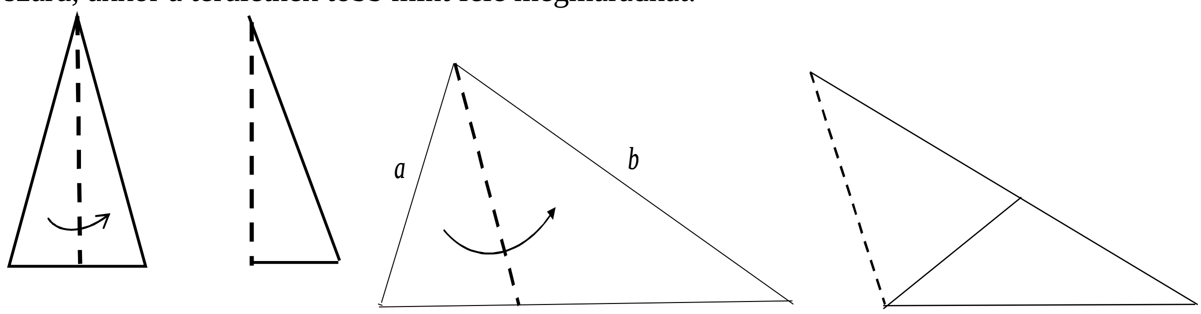
A következőkben két feladatot közlünk az

**Az egyik el akar érni egy célt, a másik meg akarja ebben akadályozni**

típusú játékok közül.

**IV/ 1 Egy elvégzett munkáért egy ezüstlapból kérheti valaki, hogy egy egységnyi területű háromszög alakú darabot vágjanak ki a számára úgy, hogy ő rajzolja a háromszöget. A hivatal azonban utasítást kap a juttatások csökkentésére, ezért jogosult a papírlapot az egyik szögfelezője mentén összehajtani, és csak az összehajtott lap mentén vágja ki az ezüstlapot. Hogyan válassza meg a kérelmező a leadott egységnyi területű háromszög alakját, hogy bármelyik szögfelező mentén való összehajtás után is a lehető legnagyobb darabot kapja?**

Egyenlő szárú háromszögnél a hajtással feleződne a terület. Ha a háromszög nem egyenlő szárú, akkor a területnek több mint fele megmaradhat.



Mivel a szögfelező a szemközti oldalt a mellette levő oldalak arányában metszi, ezért ha a szögfelező két oldalán az oldalak $a < b$, akkor a terület $b/(a+b)$-ed része megmarad. Tehát ha a lehető legnagyobb részt szeretnénk megkapni akkor arra kell törekednünk, hogy $b/a$ a lehető legnagyobb legyen, de arra is kell figyelnünk, hogy ha $a < b < c$, akkor $b/a$ és $c/b$ is a lehető legnagyobb legyen.

(Azt keressük, hogy melyik a legkevésbé egyenlő szárú háromszög?)
Hogyan válasszuk meg $a < b < c$ értékét, $b/a$ és $c/b$ is a lehető legnagyobb legyen, de közben $a+b>c$ is teljesüljön?
Legyen a legnagyobb oldal 1, és válasszuk meg $a$-t úgy hogy $a:b=b:c$ legyen.


Ebből az oldalak: $a=b^2$, $b$, és 1. A háromszög-egyenlőtlenség szerint:

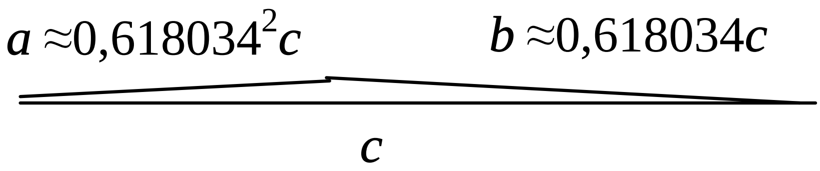
$$b^2 + b < 1$$

$$b^2 + b - 1 < 0$$

Ez pozitív b-kre akkor teljesül, ha $< \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034$.

Tehát a legkevésbé egyenlő szárú háromszög oldalainak aránya kb. 0,618034. Legfeljebb ekkora rész maradhat a háromszögből a hajtás után

**Megjegyzés:**




Az ilyen három szög azonban nagyon „lapos", mert $0{,}618034c + 0{,}618034^2c = 1{,}000000025c$

Az oldalak arány nem is lehet pontosan $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, mert ekkor $a+b=c$ lenne.

A következő játék elemzését az olvasóra bízzuk.

**IV/*b*  Egy négyzet alakú lap minden sarkában van egy pénzérme. A Kezdő játékos bekötött szemmel játszik, és el akarja érni, hogy a mind a négy pénzérmének azonos állása legyen, tehát vagy mindegyik fej, vagy mindegyik írás legyen. Ennek érdekében egy lépésben megfordíthat tetszőleges számú (1, 2, 3, vagy 4) érmét.. (Természetesen nem látja, hogy azok milyenek voltak.) A Második játékos látja az érméket, és ha mind a négy egyforma, akkor ezt megmondja és veszít. Ha viszont nem egyformák, akkor akárhányszor 90°-kal elforgathatja a négyzetlapot az érmékkel együtt. Ezután újra Kezdő fordíthat tetszőleges számú érmét, majd Második a négyzetlapot az érmékkel.**

**El tudja érni Kezdő véges számú forgatással, hogy az összes érme azonos állású legyen, vagy van-e Másodiknak olyan stratégiája, amellyel ezt megakadályozhatja?**

**Felhasznált és ajánlott irodalom**

[1.] CSIRMAZ LÁSZLÓ: Játékok és Grundy-számaik KöMaL 1980/10. sz.
[2.] CSÁKÁNY BÉLA: Diszkrét matematikai játékok POLYGON Könyvtár Szeged 1998.
**[3.]** А. МАМУЛИС, А. САВУКИНАС: Фрзя**-** в угол Квант **1984/7. sz.**

**Linkek:**

- **http://www.numericana.com/answer/games.htm**
- http://www.komal.hu/cikkek/csirmaz/grundy/grundy.h.shtml
- http://oeis.org/A002188
- http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/grundy.html