Jensen-egyenlőtlenség alkalmazásai

Geometriai egyenlőtlenségek, szélsőérték feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $f:[0;\pi]\to\mathbb{R};\ x\mapsto\sin x$ szigorúan konkáv!
2. Bizonyítsuk be, hogy az $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R};\ x\mapsto\cos x$ szigorúan konkáv!
3. Bizonyítsuk be, hogy az $f:\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R};\ x\mapsto tgx$ szigorúan konvex!
4. Fontosabb trigonometrikus összefüggések háromszögekben, igazoljuk ezeket! A szokásos jelöléseknek megfelelően *α, β, γ* a háromszög szögei, *R* a köré írt, *r* a beírt kör sugara, *a, b, c* a háromszög oldalai, *t* a területe.

   a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\dfrac{2R}{r}$ b) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s}$

   c) $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma=\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta\ \mathrm{tg}\,\gamma$ (a Δ nem derékszögű)

   d) $\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\gamma=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4t}$ e) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\dfrac{r}{R}$

   f) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=1$ g) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

   h) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

   i) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

   j) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1$

   k) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$

   l) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

   m) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$ n) $r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

5. Egy háromszög szögei a szokásos jelöléssel legyenek α, β, γ. Határozzuk meg az alábbi kifejezések legnagyobb alsó, ill. legkisebb felső korlátját!

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ c) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ d) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

6. Bizonyítsuk be a sugáregyenlőtlenséget, azaz azt, hogy bármely háromszögben a beírt kör sugara nem nagyobb a köré írt kör sugarának a felénél!

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögben $\mathrm{tg}^n\alpha+\mathrm{tg}^n\beta+\mathrm{tg}^n\gamma\ge 3\sqrt{3^n}$!

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\ge 1$!

9. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

   a) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$ b) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}$

   c) $\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\ge 4$ d) $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\ge 2\sqrt{3}$

   e) $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge 2\sqrt{3}$ f) $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge 6$

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek, ahol *s* a háromszög félkerülete, *t* a háromszög területe, *R* a háromszög köré írt, *r* beírt körének sugara!

    a) $3\sqrt{3}t\le s^2$ b) $3\sqrt{3}r\le s$ c) $s\le\frac{3\sqrt{3}R}{2}$ d) $t\le\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

11. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a hozzáírt körök sugarainak az összege nem kisebb a háromszög félkerületének a $\sqrt{3}$ szorosánál!

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög oldalaira fennáll az $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(b+a-c)\le 3abc$ egyenlőtlenség!

13. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszög oldalaira fennáll az $\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ac}{a^2+c^2-b^2}+\frac{ba}{b^2+a^2-c^2}\ge 3$ egyenlőtlenség!

14. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* egy háromszög három oldala, *s* a félkerülete, akkor $\frac{ab}{s-c}+\frac{bc}{s-a}+\frac{ca}{s-b}\ge 4s$!

15. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben fennáll az $\frac{1}{R^2}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$ egyenlőtlenség, ahol *R* a köré írt, *r* a beírt kör sugara, *a, b, c* a háromszög oldalai.

16. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögre teljesül az $\frac{1}{s_a^2-\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{s_b^2-\frac{b^2}{4}}+\frac{1}{s_c^2-\frac{c^2}{4}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2t}$ egyenlőtlenség, ahol s_a, s_b, s_c a háromszög súlyvonalai, *a, b, c* a háromszög oldalai, *t* a területe!

17. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögre fennáll a $\frac{t}{\sqrt{a^2b^2-4t^2}}+\frac{t}{\sqrt{c^2b^2-4t^2}}+\frac{t}{\sqrt{a^2c^2-4t^2}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ahol *a, b, c* a háromszög oldalai, *t* a területe!

18. Legyen a, b, c egy háromszög három oldala és t a területe! Bizonyítsuk be, hogy $t \le \sqrt{3}\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{4}$!

19. Az *ABC* háromszög belső szögfelezői a szemközti oldalakat *P, Q, R* pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a *PQR* háromszög területe nem nagyobb, mint az *ABC* háromszög területének a negyede!

20. Legyen az *ABC* háromszög területe *t*, köré írt körének sugara *r*! A belső szögfelezők a köréírt kört P, Q, R metszik. A *PQR* háromszög területe legyen *T*! Bizonyítsuk be, hogy $16T^3 \ge 27r^4t$!

21. Legyen az *ABC* háromszög belső pontja *P*! A *P* pont távolsága az *a, b, c* oldal egyenesktől legyen rendre *x, y, z*! Mely P pontok esetén lesz az $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ minimális?

22. Legyen az *ABC* háromszög belső pontja *P*! A *P* pont távolsága az *a, b, c* oldal egyenesktől legyen rendre *x, y, z*! Bizonyítsuk be, hogy $PA \cdot PB \cdot PC \ge (x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$!

23. Legyen az *ABC* háromszög belső pontja *P*! A *P* pont távolsága az *a, b, c* oldal egyenesktől legyen rendre *x, y, z*! Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le 3\sqrt{\frac{R}{2}}$, ahol *R* a háromszög köréírt körének sugara!

Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. *Oldjuk meg a pozitív valós számhármasok halmazán!
$$\left.\begin{aligned} \lg x + \lg y + \lg z &= 0 \\ 10^{3^x} + 10^{3^y} + 10^{3^z} &= 3000 \end{aligned}\right\}$$
2. *Legyen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 1$! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}} \text{ !}$$
3. ** A pozitív *a*, *b*, *c* számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a + b + c \leq 3$!
4. ** Legyen x, y, z pozitív valós szám és x+y+z=xyz! Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2} \text{ !}$$
5. ** Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, z, egynél kisebb pozitív valós számok, melyekre fennáll, hogy xy+yz+zx=1, akkor $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$!
6. **Legyen *a, b, c* három pozitív valós szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}} \geq 1 \text{!}$$
7. **Legyen az *a, b, c, d* pozitív valós számok összege 4! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{d^2+d} + \frac{d}{a^2+a} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)} \text{!}$$
8. **Legyen *a, b, c* pozitív valós szám! Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ !}$$