

Pénzváltási és rokon feladatok

dr. Kiss Géza, Budapest

Az alábbiakban olyan feladatokat igyekeztem összegyűjteni, amelyek lehetőséget teremtenek a hosszabb foglalkozásra. Sokkal inkább az esetek vizsgálatáról, a konkrét esetek alapján megtehető általános észrevételekről szólnak/ szólhatnak és nem egy-egy ötletéről.

A leírásnál igyekeztem elkülöníteni a tanulókkal feldolgozható részt a kollégáknak szóló háttéranyagtól, az utóbbit *dőlt betűvel írtam*.

Sokféle gyakorló feladatot, foglalkoztató feladatcsokrot készíthetünk a számokkal kapcsolatos érdekes kérdések mentén. Ezek közül a pénzváltási problémával foglalkozunk.

Az alapprobléma a következő:

1. Nekeressorszámban a megszokottaktól eltérően csak kétféle címletű pénz van forgalomban 5 és 7 petákos. A boltban nem tudnak visszaadni. Mekkora az a legnagyobb összeg, amelyet nem tudunk ilyen feltételek mellett pontosan kifizetni.

Megoldás:

Már az sem világos, hogy van ilyen legnagyobb szám! Hogyan kezdjük hozzá gyerekekkel a megkereséséhez? Talán először ismerkedjünk a problémával.

1/a. Keressünk minél több olyan számot, amelyet ezzel a kétféle érmével meg tudunk adni!

Azt látjuk, hogy az 5 és a 7 többszöröse minden további nélkül kifizethetők. Máris találtunk végtelen sok kifizethető összeget.

Próbáljunk most valamilyen szokásos leszámlálási módszert alkalmazni. Az egyik fajta érme darabszámát rögzítsük. Kézenfekvőnek tűnik, hogy ez a nagyobbik címlet, a 7 legyen. Ekkor a következő sorok alakulnak:

5, 10, 15, 20, 25,
7, 12, 17, 22, 27, 32, ...
14, 19, 24, 29, 34, ...
21, 26, 31, 36, 41, 46, ...
28, 33, 38, 43, 48, 53, ...

A következő sor 35-tel kezdődik és látjuk, hogy visszajutunk az első sorba, annak egy későbbi elemétől folytatjuk a felírást. Az ezt követő 42-vel kezdődik,

itt pedig tulajdonképpen a második sor folytatódik egy sorban előbb álló elemtől.

Tehát valójában nem kapunk további felírási lehetőséget, ha a 7-esek számát növeljük.

Matematikai szóhasználat 0, 7, 14, 21, 28 egy teljes maradékrendszer modulo 5.

1/b. Melyik az a legnagyobb szám, amely nem szerepel a fentebbi öt sorban?

A gyerekek hamar látják, hogy ez a szám a 23.

Ez tehát a legnagyobb összeg, amelyet nem tudunk visszaadás nélkül kifizetni 5 és 7 petákos érmékkel.

Most változtassuk a címleteket és vizsgáljuk meg hogyan változik az eredmény! Ha a két címletnek van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor minden felírt szám is ennek a számnak többszöröse lesz, egészen biztos, hogy nem lesz legnagyobb nem –felírható.

A fenti feladatot lényegében ugyanebben a formában kitűzték a Műszaki Főiskolások Hajós György Versenyén 1983-ban!

2. Legyenek most Nekerésdországban a választások után 7 és 11 petákos érmék forgalomban. Ebben az esetben melyik lesz a legnagyobb nem kifizethető összeg?

Megoldás:

Már bizonyos rutinunk van a felírható számok rendszerezésében a nagyobbik érme darabszáma szerint.

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, ...
11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 61, 67, ...
22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, ...
33, 40, 47, 54, 61, 68, 75, ...
44, 51, 58, 65, 72, 79, ...

Most a következő sor első eleme – 55- még nem a 7 többszöröse, sőt egyik korábbi sor későbbi elemével sem egyezik meg. A felírást tehát tovább kell még folytatnunk.

55, 62, 69, 76, 83, 90,
66, 73, 80, 87, ...

A következő sorban már hétszer vennék a 11-et, így visszajutunk az első sor egy későbbi eleméhez.

2/b. Keressük most meg a sorok között a legnagyobb olyan számot, amely nem fordul elő!

A gyerekek hamar rátalálnak az 59-re.

- 3.** Az eddigiek alapján, akkor bármelyik két címletet is választjuk, - persze ügyelve, hogy ne legyen 1-nél nagyobb közös osztójuk -, meg tudjuk határozni a legnagyobb olyan számot, amely nem írható fel a két címlet többszöröseinek segítségével?

Megoldás:

Ha a gyerekek mondanak egymásnak két-két címletet, akkor látjuk, hogy nagyobb számok esetén továbbra sem könnyű a végeredmény pontos megadása. Azt azért már gondolhatjuk, hogy van ilyen legnagyobb szám, de hogy pontosan mennyi lesz az, ehhez még kell tapasztalatokat gyűjteni.

3/a. Az egyes feladatokban hány darabot kellett legfeljebb vennünk a nagyobb címletű érméből?

Legfeljebb eggyel kevesebbet, mint a kisebbik címlet értéke, hiszen ha többet veszünk, akkor valamelyik sor későbbi eleméhez jutunk.

Tehát az általános esetben ($a < b$):

$$\begin{aligned} &a, 2a, 3a, 4a, \dots \\ &b, b+a, b+2a, b+3a, \dots \\ &2b, 2b+a, 2b+2a, 2b+3a, \dots \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &(a-1)b, (a-1)b+a, (a-1)b+2a, (a-1)b+3a, \dots \end{aligned}$$

A következő sorban már az a többszöröse szerepelne.

Mindegyik sorban látjuk, hogy melyik a legkisebb elem, így azt is, hogy melyik az utolsó még nem szereplő.

Ez tehát az utolsó sorban lesz a legnagyobb és éppen a -val lesz kisebb, mint $(a-1)b$.

A legnagyobb olyan összeg, amit nem tudunk kifizetni $(a-1)b - a = ab - a - b$.

Szokás ezt a legnagyobb nem-felírható számot $G(a, b)$ -vel jelölni.

Nem magától értetődő, hogy több címlet esetén is mindig van legnagyobb nem-felírható szám.

4. Amennyiben $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ mindig van olyan $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ szám, amelyre teljesül, hogy $K > G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ esetén a

$$K = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

diofantoszi egyenlet megoldható nem-negatív egészekben.

Megoldás:

Ez a Frobenius problémakör alaptételének is nyugodtan nevezhető feladat a Középiskolai Matematikai Lapokban 1997-ben Vízvári Béla cikkeihez kapcsolva került kitűzésre. A feladat állítását n -re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 2$ esetet az előbb már vázoltuk. Ha $n > 2$, akkor tegyük fel, hogy k -ig már igaz az állítás és vizsgáljuk meg $k+1$ -re. Legyen most az $n = k+1$ esetben az első k darab szám legnagyobb közös osztója d . Ekkor az indukciós feltevés szerint az $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_k}{d}$ számokkal véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható a kérdéses alakban. Így létezik olyan u , hogy $(u, a_{k+1}) = 1$ és $u = v_1 \frac{a_1}{d} + v_2 \frac{a_2}{d} + \dots + v_k \frac{a_k}{d}$, ahol v_1, v_2, \dots, v_k nem-negatív egészek. Mivel d és a_{k+1} relatív prímek, ellenkező esetben az a_1, a_2, \dots, a_{k+1} számoknak lenne 1-nél nagyobb közös osztója, ezért ud és a_{k+1} is relatív prímek. A fentiek szerint $n = 2$ esetén az állítás igaz, azaz véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható

$$x_1du + x_2a_{k+1} = x_1v_1a_1 + x_1v_2a_2 + \dots + x_1v_k a_k + x_2a_{k+1}$$

alakban, ahol $x_1v_1, x_1v_2, \dots, x_1v_k, x_2$ nem-negatív egészek.

Annak ellenére, hogy ez az általános eredmény gyakorlatilag az eredeti probléma felvetődése óta ismert, a legtöbb konkrét esetben nehéz feladatnak bizonyult $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pontos meghatározása. Már három különböző címlet esetén sem adható meg egységes általános formula. Az újabb címlet engedélyezése vagy egyáltalán nem befolyásolja a legnagyobb nem-felírható számot (mert esetleg valamelyik korábbi címlet többszöröse vagy nagyobb a

többivel nem felírható legnagyobb számmal), vagy az újabb kombinációs lehetőségek miatt akár lényegesen csökkenti azt.

5. Ismerve az általános formulát határozzuk meg azokat a lehetséges címlet-párokat, amelyekre a legnagyobb nem kifizethető összeg pontosan 31 lesz.

Megoldás:

A megoldáshoz felhasználjuk az előbbi általános eredményt: $ab - a - b = 31$. Ennek az egyenletnek azokat a pozitív egész a , b megoldásait keressük, amelyekre a és b relatív prímek. Az általánosság megszorítása nélkül most is feltehetjük, hogy $a < b$.

Két szokásos megoldás is ismert. Az egyik a szorzattá alakítás, a másik az egyik ismeretlen kifejezése és a kapott tört vizsgálata.

Az első módszernél adjunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához 1-et:

$$\begin{aligned}ab - a - b + 1 &= 32, \\(a-1)(b-1) &= 32.\end{aligned}$$

A lehetséges osztópárok: $(1, 32)$, $(2, 16)$, $(4, 8)$.

Ennek megfelelően a megoldások: $a = 2, b = 33$; $a = 3, b = 17$; $a = 5, b = 9$.

A másik módszernél kifejezzük az egyik ismeretlent, mondjuk b -t az a segítségével.

$$b = \frac{a+31}{a-1}.$$

Ezután leválasztjuk a számlálóból az a -t tartalmazó részt.

$$b = \frac{a-1+32}{a-1} = \frac{a-1}{a-1} + \frac{32}{a-1} = 1 + \frac{32}{a-1}.$$

Most látjuk, hogy $a-1$ osztója 32-nek és tudjuk, hogy a kisebb, mint b .

Innen ugyanazokat a megoldásokat kapjuk, mint az első módszernél.

6. Vannak-e olyan pozitív egészek, amelyekre pontosan egy megoldaspárt kapunk?

Megoldás:

Az előbbi első megoldási módszer ismeretében a választ meg tudjuk adni. Ha $(a-1)(b-1)$ prímszám, akkor csak $a=2, b=p+1$ az egyetlen megoldás. Tehát minden 1-nél nagyobb pozitív egész lehet legalább egy címletpárra a legnagyobb nem-felírható szám.

Most már tényleg célszerű feltennünk azt a kézenfekvő és eddig háttérben hagyott kérdést, hogy

7. Hogyan változik a 2. feladat eredménye, ha harmadik címletet is bevezetünk, engedélyezzük a 13-at?

Megoldás:

Itt már sokkal áttekinthetlenebb lesz a helyzet. Azt továbbra is gondoljuk, hogy ismét a legkisebb érme szerint érdemes vizsgálódnunk. A "hetes"-ekből tetszőleges számút véve a hetes maradék nem változik. Tehát a nagyobb érmékből minél kevesebb felhasználásával az összes hetes maradékosztályba el kell jutnunk. Vegyük a 2. feladat megoldásánál szereplő sorokat és mindegyik mellett tüntessük fel a hetes maradékot is!

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, ...	0
11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 61, 67, ...	4
22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, ...	1
33, 40, 47, 54, 61, 68, 75, ...	5
44, 51, 58, 65, 72, 79, ...	2
55, 62, 69, 76, 83, 90,	6
66, 73, 80, 87, ...	3

Ezt a helyzetet a 13-as érmék felhasználása nélkül is elértük, a helyzeten tehát a 13-ak bevonásával csak javíthatunk.

Pl. az rögtön látható, hogy az 55-tel kezdődő sor már 13-tól indítható. Ha a 66-ot is ki tudnánk váltani egy kisebb induló elemmel, akkor a legnagyobb nem-felírható szám már jelentősen csökkenne. Ha veszünk egy 11-es és egy 13-as érmét, akkor ezek összege 24, pontosan 3-at ad maradékul 7-tel osztva. Tehát az utolsó sor már 24-től indítható.

Próbáljunk most olyan felírást választani, hogy egészen biztosan rátaláljunk a legnagyobb nem-felírható számra.

Ehhez javasolható, hogy a 7-től különbözők darabszáma és növekvő sorrendje alapján dolgozzunk.

Vehetjük a következő növekvő sorozatot és írjuk mindegyik szám alá a hetes maradékát:

11,	13,	11+11,	11+13,	13+13,	3x11,	2x11+13	11+2x13	3x13	4x11
11,	13,	22,	24,	26,	33,	35,	37,	39,	44, ..
4	6	1	3	5	5	0	2	4	2,...

Most precízen haladtunk a felírásokkal és látjuk, hogy a legutoljára feltöltődő sor a 37-tel kezdődő. Tehát az ebben nem-szereplő legnagyobb szám lesz, amelyet kerestünk, a 30.

Elég meglepő eredményt kaptunk. Ha a 11 mellett engedélyezzük a 13 használatát is, akkor a legnagyobb nem-felírható szám 59-ről 30-ra csökken.

Ennek kapcsán érdemes néhány észrevételt tennünk. Ha „túl” nagy számot vettünk volna a 13 helyett, akkor az biztosan nem befolyásolta volna a végeredményt. Tehát univerzális módszer már három különböző címlet esetén biztosan nincs.

8. Mielőtt továbblépünk, még határozzuk meg a legnagyobb nem-felírható számot 7, 11, 12 címletű érmék esetén.

Megoldás:

Már van bizonyos rutinunk az ilyen jellegű feladatok megoldásában, ezért csak a hetes maradékokat írjuk fel a másik kétféle címlettel:

11,	12,	22,	23,	24,	33,	34,	35,	36,	44, ...
4	5	1	2	3	5	6	0	1	2, ...

Látható, hogy a 34 esetében már elértük, hogy mindegyik nullától különböző maradék szerepel legalább egyszer. Tehát a legnagyobb nem-felírható szám ebben az esetben a $27 (= 34 - 7)$ lesz.

Ha egy-egy ilyen címletrendszert be kívánnánk vezetni, akkor nem csak az a fontos kérdés, hogy melyik a legnagyobb nem-kifizethető összeg, hanem az is, hogy hány ilyen összeg van összesen? Folytassuk tehát vizsgálatainkat nem-felírhatóak számának meghatározásával.

9. Ha csak 7 és 11 petáros érméket használhatunk, akkor hány olyan pozitív szám van, amelynek megfelelő összeget nem lehet pontosan kifizetni ezekkel az érmékkel?

Megoldás:

Vissza kell térnünk az eredeti sorainkhoz és mindegyiket kiegészíteni az eddig még nem szereplőkkel. A sorok után azt is külön feltüntetjük, hogy azokban hány nem-felírható szám van.

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, ...	0
4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 61, 67, ...	1
1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, ..	3
5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, 54, 61, 68, 75, ...	4
2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65, 72, 79, ...	6
6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, 83, 90,	7
3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, ...	9

Ez összesen 30 szám, nagyjából a legnagyobb felírható szám fele.

Ez persze lehet az adatok választásból adódó extrém helyzet is, ezért érdemes még több konkrét esetet is megvizsgálnunk. Vegyünk most két nagyobb címletet.

10. Határozzuk meg a nem-felírható számok számát, ha a két engedélyezett címlet 13 és 20.

Megoldás:

Eddigi ismereteink alapján mindegyik nullától különböző 13-as maradékhoz csak a legkisebb felírhatót adjuk meg. Mindegyik alatt feltüntetjük, hogy mekkora maradékot ad.

20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240
7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6

Látjuk, hogy a nem-nulla maradékok mindegyike pontosan egyszer szerepel. Ennek megfelelően a legnagyobb nem-felírható szám $240 - 13 = 227$.

Most már rátérünk a nem-felírható számának meghatározására.

Mindegyik előbbi számunk alá felírjuk, hogy hány darab kisebb, ekkora 13-as maradékú pozitív szám van.

20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240
 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18

Ha ezeket összeadjuk, akkor 114-et kapunk, amely éppen ugyanolyan viszonyban van a 227-tel, mint az előző feladat esetében, a legnagyobb nem-felírhatónál eggyel nagyobb szám fele. Ez már biztosan nem lehet véletlen.

11. Az általános eredmény itt az, hogy a és b címletek esetén a nem-felírható pozitív egészek száma pontosan $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

Felhasználjuk, hogy a legkisebb felírhatók az egyes maradékosztályokban $b, 2b, \dots, (a-1)b$. Tudjuk, hogy ezek a számok éppen az $1, 2, \dots, (a-1)$ egy permutációjának elemeivel lesznek rendre kongruensek mod a . Legyen ez a permutáció k_1, k_2, \dots, k_{a-1} . Ekkor a $t \cdot b$ maradékosztályban a nem felírható elemek száma pontosan

$$\left[\frac{t \cdot b}{a} \right] = \frac{t \cdot b - k_t}{a}$$

Ezeket összeadva az összes t -re megkapjuk a nem-felírhatóak számát.

$$\frac{b-k_1}{a} + \frac{2b-k_2}{a} + \dots + \frac{(a-1)b-k_{a-1}}{a} =$$

$$\frac{(1+2+\dots+a-1)b - (k_1+k_2+\dots+k_{a-1})}{a} = \frac{a(a-1)(b-1)}{2a} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Természetesen további lehetőségek is vannak az általánosításra. Az egyik már korábban vizsgált és megoldott eset arra vonatkozik, amikor a címletek számtani sorozatot alkotnak.

Itt most ezek közül csak azt az esetet vesszük, amikor három egymást követő páratlan számról van szó.

12. Határozzuk meg $G(2k+1, 2k+3, 2k+5)$ -öt.

Megoldás:

A feladat megoldásához a kulcsot megtaláljuk, amennyiben $2k+1$ szerint tekintjük a másik két szám lehetséges maradékait. Ezek mindegyik többszörö-

zés esetében a 2 és a 4 többszörösei lesznek. A 0, 2, 4, . . . , 4k lehetnek ezek a maradékok. Ezzel a felsorolással mindegyik nem-nulla maradékot megadtuk 2k+1 szerint.

A legnagyobb maradék eléréséhez a 2k+5 elemet pontosan k-szor kell vennünk (illetve, ha helyette néhányszor két darab 2k+3-at veszünk, akkor „rosszabbul” járunk). Legfeljebb ugyanennyi elemből a kisebb maradékok is előállíthatók, így a legnagyobb nem felírható elem

$$G(2k+1, 2k+3, 2k+5) = k(2k+5) - (2k+1) = 2k^2 + 3k - 1.$$

Ezt a módszert követve Roberts az általános eredményt is megadta 1966-ban.

Egy látszólag távoli kérdéskört is szeretnék még megemlíteni. Ez az ú.n. postabélyeg-probléma. Itt is címletekkel kell dolgozni, de a kérdésfeltevés egészen más, mint a pénzváltási problémánál.

Adottak bélyeg-címletek: $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, ahol $a_1 = 1$, továbbá adott egy h pozitív egész, amellyel a felhasználható bélyegek számát maximalizáljuk.

Keressük meg a legkisebb olyan r számot, amely nem írható fel $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k$ alakban, ahol az x_i -k nem-negatív egészek és $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq h$. A nullától $s_h(a_1, a_2, \dots, a_k) = r - 1$ -ig terjedő számok mindegyike kifejezhető legfeljebb h darab „bélyeg segítségével”. Ezt az $s_h(a_1, a_2, \dots, a_k)$ számot hívjuk az a_1, a_2, \dots, a_k számok h -terjedelmének.

13. Legyenek a postabélyegek címletei 1, 4 és 9. Határozzuk meg a terjedelmet $h = 4$ és $h = 5$ esetén.

Megoldás:

A h értékét növelve látjuk, hogy melyek lesznek a felírható számok

$h = 1$	$\boxed{1}$, 4, 9
$h = 2$	1, $\boxed{2}$, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 18
$h = 3$	1, 2, 3, 4, 5, $\boxed{6}$, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 22, 27
$h = 4$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, $\boxed{23}$, 26

A terjedelmet mutató számot mindegyik sorban bekeretezve jelöltük.

És végül tekintsük a $h = 5$ esetet. Elegendő csak a 23-nál nagyobb számokat vizsgálnunk, hiszen 23-ig négy bélyeg is elegendő.

A 24 előáll, mint $9+9+4+1+1$.

A következő számhoz a 25-höz felhasználhatunk 4 db 4-est és egy 9-et.

Sőt! A $h = 4$ esetben szereplő, 16-tól 23-ig terjedő számok mindegyikéhez hozzáadva egy-egy 9-est kapjuk, hogy 32-ig biztosan mindent fel tudunk írni. A 32-höz felhasznált bélyegek:

$32=9+9+9+4+1$. Mivel a két 9-cel felírható maximum 30, ezért a 33-hoz is kellene pontosan három darab 9-es. A maradék 6 viszont nem írható fel két darab 4-gyel, vagy 1-gyel. Megtaláltuk, hogy $h = 5$ -re a terjedelem $\overline{32}$.

Nagyon szép az a kapcsolat, amelyet egy Meures nevű német egyetemi hallgató államvizsga-dolgozatában publikált. Ez a tétel a postabélyeg-probléma és a pénzváltási probléma tényleges kapcsolatát mutatja meg.

Jelöljük az előbbi bélyegcímletek halmazát A_k -val. $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Legyen $\overline{A_k} = a\{a_k - a_{k-1}, a_k - a_{k-2}, \dots, a_k - a_1, a_k\}$. Akkor elég nagy h -ra igaz a következő tétel:

Tétel: *Létezik olyan h_1 pozitív egész, hogy tetszőleges $h \geq h_1$ esetén*

$$s_h(A_k) = h \cdot a_k - G(\overline{A_k}) - 1.$$

Befejezésül megmutatjuk, hogyan lehet konkrét esetben használni ezt a tételt.

Az előző 13. feladatban szereplő számokra írjuk fel az $\overline{A_k}$ halmazt.

$$\overline{A_k} = \{5, 8, 9\}$$

Erre a három számra könnyedén meg tudjuk határozni a legnagyobb nem felírható számot, hiszen kényelmesen a 8 és 9 segítségével kapható számok ötös maradékait kell csak figyelniük. Soraink:

5, 10, 15, 20, ...	0
8, 13, 18, 23, ...	3
9, 14, 19, 24, ...	4
16, 21, 26, 31, ...	1
17, 22, 27, 32, ...	2

A legnagyobb nem-felírható szám a 12, $G(\overline{A_3}) = 12$.

A $h = 4$ esetben $s_4(A_k) = 4 \cdot 9 - 12 - 1 = 23$.

A $h = 5$ -re pedig $s_5(A_k) = 5 \cdot 9 - 12 - 1 = 32$.

A többnyire megoldatlan kérdéseket tartalmazó pénzváltási problémának a postabélyeg-probléma egy átfogalmazási lehetősége. Nem meglepő tehát, hogy ennek a problémakörnek is egyre nagyobb irodalma van.

Felhasznált irodalom:

- 1, Vízvári Béla, Mit rakjunk a hátizsákba, hogyan váltsunk fel pénzt? I.-II. Középiskolai Matematikai Lapok, Budapest, 46 (1996), 386 - 391, 452- 457.
- 2, J.L. Ramírez Alfonsín: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford University Press, 2005.
- 3, G. Kiss, The Frobenius problem on competitions and in classroom, Teaching Mathematics and Computer Science, 1/2 (2003), 203- 218.
- 4, Ernst S. Selmer: On the Postage Stamp Problem with three stamp denominations Math. Scand. 47 (1980) 29-71. (internet)