Színezések

Fonyó Lajos, Keszthely

1. *A sík pontjait kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $d \in R^+$ esetén lesz két egymástól d távolságra levő pont, amelyek azonos színűek.*

I. megoldás:

Válasszunk ki a síkon egy tetszőleges *O* pontot és rajzoljunk egy ilyen középpontú *d* sugarú kört. Két lehetőség adódhat:

a) A körvonal tartalmaz egy olyan *P* pontot, melynek színe *O*-val megegyező. Ebben az esetben *O* és *P* egy megfelelő tulajdonságú pontpárt alkot.

b) Ha a körvonal minden pontja *O*-tól eltérő színű, akkor a kör egy *d* hosszúságú húrjának két végpontja teljesíti a feladat feltételét.

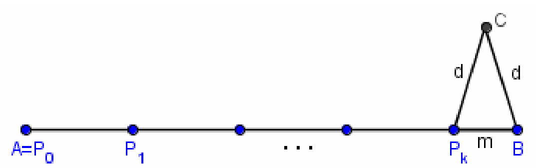
II. megoldás:

Tekintsük egy *d* oldalú szabályos háromszög csúcsait. Mivel ezek a pontok két színnel vannak kiszínezve, ezért a skatulyaelv értelmében van közöttük legalább kettő, melyek azonos színűek. Így az állítás ezekre teljesül.

2. *A sík pontjait kiszínezzük két színel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $d \in \mathbb{R}^+$ esetén lesz két egymástól d távolságra lévő pont, amelyek különböző színűek.*

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben egy adott színezés mellett nincs egymástól *d* távolságra két különböző színű pont!



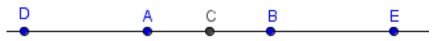
Válasszunk ki két tetszőleges *A* és *B* pontot, melyek közül *A* az 1., míg *B* a 2. színnel lett megjelölve. Tegyük fel, hogy $AB = t = k \cdot d + m$, ahol $k \in \mathbb{N}$, és $0 < m < d$. Definiáljunk egy olyan P_i ($i = 0, \ldots, k$) pontsorozatot az *AB* szakaszon, amelyre $P_0 = A$ és $AP_t = t \cdot d$. Indirekt feltevésünk alapján a pontsorozat minden tagja *A*-val megegyező színezésű, és $P_k B = m < d$.

Szerkesszünk ezután egy olyan egyenlőszárú $P_k BC$ háromszöget, melyre $P_k C = BC = d$. Az $m < 2d$ egyenlőtlenség teljesülése miatt ez a háromszög

létezik. Mivel az indukciós feltevés alapján P_k *A*-val azonos színű, és tőle *d* távolságra csak 2. színnel megjelölt pontok találhatók, ezért *C*-nek is ilyennek kell lennie. Viszont ekkor az egymástól *d* távolságra lévő *B* és *C* pontok színe különböző lenne.
Így ellentmondáshoz jutottunk, ami azt jelenti, hogy a feladat állítása teljesül.

3. *Egy egyenes pontjait kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy mindig lehet találni három azonos szintű pontot, melyekre teljesül, hogy közülük az egyik a másik két pont által meghatározott szakasz felezőpontja.*

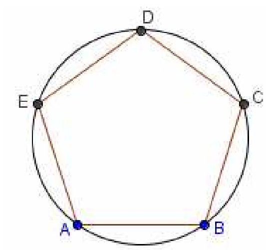
Megoldás:



Legyen az *e* egyenes két azonos színű pontja *A* és *B*. Ha az *AB* szakasz *C* felezőpontja is ilyen színű, akkor az állítás ezen ponthármasra teljesül. Ha *C* *A*-tól, *B*-től különböző színű pont, akkor tekintsük azon *D* és *E* pontokat, melyek sorrendje az *e* egyenesen *D*, *A*, *B*, *E*, és amelyekre teljesülnek az *DA* = *AB* = *BE* egyenlőségek. Ekkor az alábbi esetek állhatnak fenn:
a) *D* azonos színű *A*-val és *B*-vel;
b) *E* azonos színű *A*-val és *B*-vel;
c) *D* és *E* is más színű, mint *A* és *B*.
Az egyes esetekben a {*D*, *A*, *B*}, {*A*, *B*, *E*} és a {*D*, *C*, *E*} ponthármasok teljesítik a feladat feltételét.

4. *Egy körvonal pontjait kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy mindig lehet találni három azonos színű pontot, melyekre teljesül, hogy közülük az egyik a másik két pont által meghatározott két körív egyikének a felezőpontja.*

Megoldás:



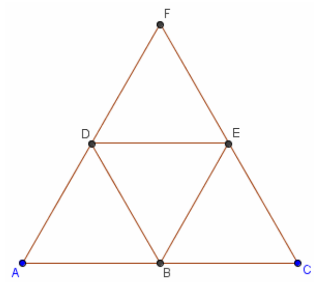
Tekintsünk egyet az adott körbe írt szabályos ötszögek közül. Ennek biztosan van két szomszédos csúcsa, melyek azonos színűek, hiszen ha az óramutató járása szerint haladva váltakozó színekkel jelöljük meg a csúcspontokat, akkor az utolsó az elsővel megegyező színű lesz.
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az *ABCDE* ötszög *A* és *B* csúcsa lett azonosan befestve.

Ekkor az alábbi esetek állhatnak fenn:

- Ha a *C*, *D*, *E* pontok közül bármelyik színe megegyezik az *A* és *B* pontokéval, akkor a *AB* ív = *BC* ív *BD* ív = *DA* ív *EA* ív = *AB* ív egyenlőségek miatt a feladat állítása teljesül.
- Ha a *C*, *D*, *E* pontok mindegyikének színe különbözik az *A* és *B* pontokétól, akkor a *CD* ív = *DE* ív egyenlőség alapján ismét igaz állításhoz jutunk.

5. *A sík pontjait kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy keletkezik olyan szabályos háromszög, amelynek csúcsai azonos színűek lesznek.*

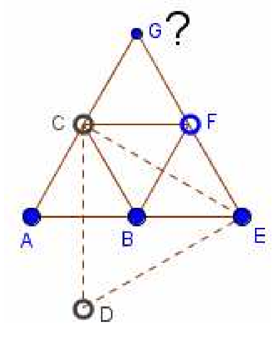
Megoldás:



A 2. feladat megoldása alapján találhatunk olyan egy egyenesre eső *A*, *B*, *C* pontokat, amelyek azonos színűek és *AB* = *BC*.
Ekkor az ábra egy nagyobb és négy kisebb háromszöget tartalmaz, melyben a következő esetek valósulhatnak meg:
a) *D* azonos színű *A*, *B*, *C*-vel;
b) *E* azonos színű *A*, *B*, *C*-vel;
c) *F* azonos színű *A*, *B*, *C*-vel;
d) *D*, *E*, *F* színe különbözik az *A*, *B*, *C* pontokétól.
Az egyes esetekben az *ABD*, *BCE*, *ACF* illetve a *DEF* háromszögek lesznek azok, amelyek teljesítik a feladat feltételét.

6. *Jancsi és Juliska egy játékot játszik egy rajzlapon. Jancsi egyesével pontokat jelöl ki a papíron, Juliska pedig szépen sorban beszínezi azokat két választott szín valamelyikével. Elérheti-e Jancsi, hogy keletkezzen olyan szabályos háromszög, amelynek minden csúcsa azonos színű, ha Juliska azt nem akarja?*

Megoldás:



Jelölje ki Jancsi első 3 pontként egy szabályos háromszög csúcsait. Ha Juliska nem akar egyszínű csúcsokkal rendelkező egyenlő oldalú háromszöget kialakítani, akkor a két színt 2:1 arányban alkalmazza a színezésnél. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az *A* és *B* jelzésű csúcsok kapják az egyik, *C* pedig a másik színt.
Ekkor a további pontokat Jancsi válassza ki az alábbiak szerint:

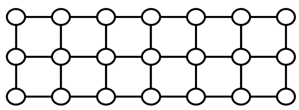
D legyen a *C* pont tükörképe az *AB* egyenesre nézve, *E* az *A* pont tükörképe a *B* pontra nézve, *F* a *D* pont tükörképe a *B* pontra nézve, végül a *G* pont az *A* pont tükörképe a *C* pontra nézve. Ekkor Juliska, ha az *ABD*, *CDE*, *BEF* szabályos háromszögeknél nem akar egységes színű csúcsokat létrehozni, akkor *D*-nél *C*-típusú, *E*-nél *AB*-típusú, *F*-nél *C*-típusú színezést kell alkalmaznia. Mivel a *G* pont az *A*, *E* és *C*, *F* pontokkal is szabályos háromszöget alkot, ezért akár *AB*, akár *C* típusú színezést is kap, a 7. pontnál mindenképpen kialakul az egyszínű csúcsokat tartalmazó egyenlő oldalú háromszög.
Tehát Juliska nem tudja megakadályozni Jancsi tervét.

7. *A sík pontjai kiszínezzük két színnel. Tekintsük az azonos színű pontok távolságait. Bizonyítsuk be, hogy legalább az egyik szín esetén a távolságok mérőszáma bármilyen pozitív valós szám lehet.*

Megoldás:

Alkalmazzunk indirekt bizonyítást.
Tegyük fel, hogy az egyik színben nincsen egymástól a, a másik szín esetén pedig *b* távolságra lévő két azonos színű pont. $\left(a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+, a \geq b\right)$
Válasszunk ki egy 1. színnel színezett *A* pontot! Mivel tőle a távolságra csak 2. színnel festett pontok vannak, ezért jelöljünk ki a síkon tetszőlegesen egy ilyen tulajdonságú *B* pontot. Tekintsünk egy olyan *ABC* háromszöget, melyben $AC = a$ és $BC = b$ hosszúságú. Ez az alakzat a háromszög-egyenlőtlenség miatt létezik. Ha a *C* csúcs az első színnel van megjelölve, akkor ebben a színben létezik $a \in \mathbb{R}^+$ távolságra lévő két pont, ha pedig a másodikkal van kifestve, akkor abban a színben létezik $b \in \mathbb{R}^+$ távolságra lévő két pont. Mindenképpen ellentmondáshoz jutottunk, ami éppen a feladat állításának helyességét igazolja.

8. *Az alábbi rácsban 11 pontot befestettünk feketére. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan választjuk is ki ezeket a pontokat, mindig lesz olyan téglalap, melynek csúcsai feketék, oldalai pedig rácsvonalakra esnek.*

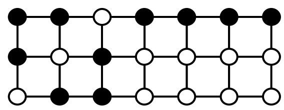


Megoldás:

Két esetet érdemes vizsgálnunk.
a) Van olyan oszlop, amelybe 3 feketére színezett pont kerül. Ekkor a többi 8 megjelölt pont a maradék 6 oszlop valamelyikébe kerül, és a skatulya-elv

értelmében biztosan lesz két olyan közöttük, amelyik ugyanabba az oszlopba kerül. Ekkor ezen két pont és a velük azonos sorban levő, a teljesen beszínezett oszlopban levő két másik pont egy feltételeknek megfelelő téglalapot határoz meg.

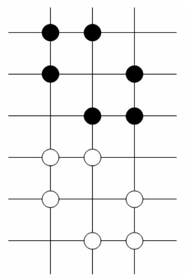
b) Minden oszlopba legfeljebb 2 feketére színezett pont kerül. Mivel $11 = 7 \cdot 1 + 4$, ezért ekkor biztosan lesz 4 olyan oszlop, melyekbe 2-2 besötétített pont jut. Tekintsük ezt a 4 oszlopot! Adott oszlopon belül 3-féleképpen választhatjuk ki, hogy a fekete pontok melyik sorokba kerüljenek (1-2., 1-3., 2-3. sor). Szintén a skatulya-elv értelmében a 4 oszlop között biztosan lesz legalább kettő, melyekben a két sötét pont azonos sorban foglal helyet. Ez a 4 pont most is egy feltételeknek megfelelő téglalapot jelöl ki.



Megjegyzés: 10 fekete pont esetén nem feltétlenül keletkezik megfelelő téglalap, például az ábra szerinti elrendezés esetén.

9. *A sík pontjait kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan téglalap, amelynek csúcsai azonos színűek.*

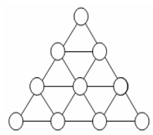
Megoldás:



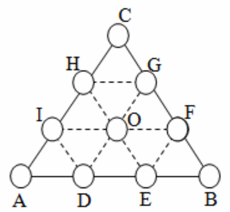
Tekintsünk a síkon egy négyzetrácsot. Megmutatjuk, hogy már ennek a rácspontjai között is van négy olyan, amelyek azonos színűek, és egy téglalap csúcsait alkotják. Tekintsünk 3 db függőleges helyzetű rácsegyenest. Az ezekre merőleges, vízszintes helyzetű rácsvonalakkal képzett metszéspontok között biztosan lesz két azonos színű pont minden vízszintes egyenesen. Ez a két azonos színű pont egy adott vízszintes rácsegyenesen 3-féle pozícióban állhat, és 2-féle színű lehet. Tekintsünk most $2 \cdot 3 + 1 = 7$ db vízszintes rácsvonalat! Ekkor a kiválasztott függőleges rács egyenesekkel alkotott metszéspontjaik között lesz két olyan pontpár, amelyek azonos színű pontokból állnak, továbbá ugyanazon a két függőleges vonalon vannak. Ez a négy pont egy megfelelő tulajdonságú téglalapot határoz meg.

Megjegyzés: $n\left(n \in \mathbb{N}^+, n \geq 3\right)$ szín használata esetén $n+1$ db függőleges és $n\binom{n+1}{2}+1$ vízszintes rácsegyenes metszéspontjaiból kiválasztható 4 olyan pont, amely a feltételeknek megfelelő téglalapot jelöl ki.

10. *Az ábra szerinti szabályos háromszög alakú rácsban néhány pontot befestünk feketére. Maximálisan hány pontot színezhetünk be úgy, hogy közülük semelyik három ne alkosson szabályos háromszöget?*



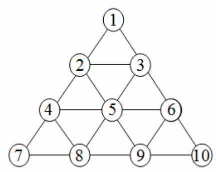
Megoldás:



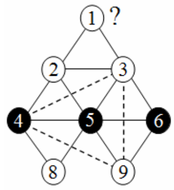
Alkalmazzuk az ábra szerinti jelöléseket. Először meg fogjuk mutatni, hogy megfelelően kiválasztott 6 pont beszínezése esetén még biztosítható, hogy közülük semelyik három ne alkosson szabályos háromszöget.
Fessük be például az {*A*, *I*, *H*, *B*, *F*, *G*} ponthatost. Ez egy megfelelő választás, mivel
- 3 egy egyenesre eső pont elfajuló háromszöget határoz meg.
- ha az *AC* oldalról választunk ki két pontot, akkor *A*, *I* a *D*-vel, *A*, *H* az *E*-vel, *H*, *I* pedig az *O*-val alkotna szabályos háromszöget, de a 3. pontok egyik esetben sincsenek a megadott ponthatosban.
- ha a *BC* oldalról választunk ki két pontot, akkor *B*, *F* az *E*-vel, *B*, *G* a *D*-vel, *F*, *G* pedig az *O*-val alkotna szabályos háromszöget, de a 3. pontok most sem szerepelnek a megadott ponthatosban.
A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy 7 pont beszínezése esetén mindenképpen kapnánk fekete csúcspontokkal rendelkező szabályos háromszöget. Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy az *O* szerepel (*a* eset), vagy nem szerepel (*b* eset) a kiválasztott pontok között.

a) Ha tekintjük az *ODE*, *OFG*, *OHI* és *ABC* szabályos háromszögeket, ha nem akarjuk, hogy a befestett pontok szabályos háromszögeket alkossanak, akkor a {*D*, *E*}, {*F*, *G*}, {*H*, *I*}, {*A*, *B*, *C*} pontcsoportok közül legalább egyet-egyet nem sötétíthetünk be.
   Ez viszont azt eredményezné, hogy a fekete pontok száma legfeljebb $10-4=6$ lenne.
b) Ha tekintjük az *ADI*, *BFE*, *CHG* szabályos háromszögeket, ha nem akarjuk, hogy a befestett pontok szabályos háromszögeket alkossanak, akkor az {*A*, *D*, *I*}, {*B*, *F*, *E*}, {*C*, *H*, *G*} pontcsoportok tagjai közül legalább egyet-egyet nem sötétíthetünk be, ami *O*-val kiegészítve legalább 4 pont kimaradását eredményezi.
   Így most sem lehet a fekete pontok száma 6-nál több.

11. *Az ábra szerinti szabályos háromszög alakú rács 10 pontját kiszínezzük két színnel. Elérhető-e, hogy ne keletkezzen olyan egyenlő oldalú háromszög, amelynek minden csúcsa azonos színű?*



Megoldás:

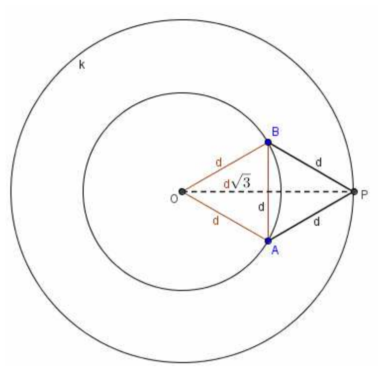


Meg fogjuk mutatni, hogy tetszőleges színezés mellett mindig keletkezik az ábrán olyan szabályos háromszög, melynek csúcsai azonos színűek.
Legyen az 5-ös pont az 1. színnel színezett. Mivel a 3, 4, 9-es pontok szabályos háromszöget alkotnak, ezért ha nem akarjuk, hogy kialakuljon egyszínű egyenlő oldalú háromszög, akkor az említett csúcsok közül legalább egyet még az 1. színnel kell befestenünk.
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a 4-es jelzésű pont. (Az ábra középpont körüli +120°-os vagy +240°-os elforgatásával elérhető, hogy az egyes színezésű pont a 4-es helyére kerüljön.)
Ha a továbbiakban is törekszünk arra, hogy az ábrán ne alakuljon ki egyszínű szabályos háromszög, akkor szépen sorban haladva

- a 2-es és 8-as pont csak a 2. színt kaphatja,
- a 6-os pontot csak az 1. színnel jelölhetjük meg,
- végül a 3-as pont csak a 2. színnel lehet befestve.
  Viszont ezután az 1-es pont akármilyen színezést is kap, mindenképpen kialakul egy azonos színű csúcsokkal rendelkező szabályos háromszög, mivel
- 1. színnel való színezés esetén a 4, 6, 1-es
- míg a 2. színnel való befestés esetén a 2, 3, 1-es pontok adnak ilyen háromszöget.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

12. *A sík pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges* $d \in \mathbb{R}^+$ *esetén lesz két egymástól d távolságra levő pont, amelyek azonos színűek.*

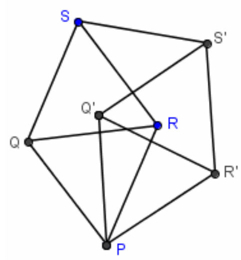


I. megoldás:

Válasszuk ki a sík azon *O* pontját, amely az 1. színnel van megjelölve, és rajzoljunk egy *O* középpontú $d\sqrt{3}$ sugarú *k* kört.

Ha ezen körvonal minden pontja az *O*-val megegyező színű, akkor a kör tetszőleges *d* hosszúságú húrjának végpontjai teljesítik a feladat állítását.
Ha az előbbi eset nem áll fenn, akkor válasszuk ki k egy 2. színnel megjelölt *P* pontját, és keressük meg a sík azon *A* és *B* pontjait, amelyek *O*-val és *P*-vel is egy-egy *d* oldalú szabályos háromszöget alkotnak. Ekkor, ha *A* és *B* közül legalább az egyik 1. színnel festett, akkor *O*-val, ha pedig a 2. színnel jelölt, akkor *P*-vel együtt kapunk a feladat feltételét teljesítő pontpárt. Ha pedig *A* és *B* is a 3. színnel színezett, akkor ezen két pont lesz megfelelő.

II. megoldás:



Tekintsük a sík ábra szerinti pontrendszerét, amelyben a *PQR* és a *QRS* *d* oldalú szabályos háromszögek, míg a *Q*'*R*'*S*' ponthármas a *QRS* pontok *P* körüli olyan szöggel történő elforgatásával adódnak, amikor fennáll az *SS*'=*d* egyenlőség.
Tegyük fel, hogy a 7 pont kiszínezhető három színnel úgy, hogy az egymástól *d* távolságra lévő pontok mindig különböző színt kapjanak. Ekkor a {*P*, *Q*, *R*} és az {*S*, *Q*, *R*} ponthármas tagjainak is páronként különböző színt kell kapniuk, ami mivel csak három színünk van, azt eredményezi, hogy a *P* és az *S* pontok azonos színűek.
A {*P*, *R*', *Q*'}, {*S*', *R*', *Q*'} ponthármasokra megismételve a gondolatmenetet, az adódik, hogy *P* és *S* színe is azonos. Így *S* és *S*' is azonos színű, és távolságuk *d*. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, ami igazolja a feladat állítását.

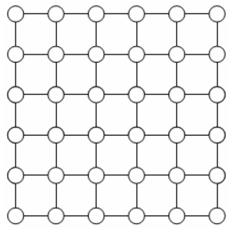
13. *Kiszínezhető-e a sík három szín felhasználásával úgy, hogy annak bármely egyenesére csak olyan pontok illeszkedjenek, melyek megjelöléséhez pontosan két színt használtunk?*

Megoldás:

A feltétel megvalósítható például az alábbi konstrukció alapján:
Válasszuk ki a sík egy tetszőleges *O* pontját, és színezzük ki az 1. színnel. Ezután rajzoljunk meg két *O*-n áthaladó egymásra merőleges e_1 és e_2 egyenest, és *O*-tól különböző pontjait fessük be a 2. színnel. Végül a sík további pontjait jelöljük meg a 3. színnel. Ekkor

- e_1 és e_2 csak 1. és 2.,
- az *O*-n áthaladó e_1, e_2-től különböző egyenesek csak 1. és 3..
- az *O*-ra nem illeszkedő egyenesek pedig csak 2. és 3. színű pontokat tartalmaznak.

14. *Az alábbi rács bizonyos pontjai feketék, a többiek fehérek. A fekete pontok fehérre, a fehérek pedig feketére festhetők, de csak úgy, hogy egy lépésben egy teljes sor, vagy egy teljes oszlop valamennyi mezőjének változtathatjuk meg a színét.*
Elérhető-e mindig, hogy a rács minden pontja fekete legyen, ha
a) eredetileg a rácsban páratlan számú fekete pont volt;
b) eredetileg a rácsban páros számú fekete pont volt?



Megoldás:

a) Egy oszlop vagy sor átfestésekor pontosan 6 pont színe változik meg. Így, ha átfestés előtt ott $f\left(f \in \mathbb{N},\ f \le 6\right)$ fehér pont volt, akkor utána $6-f$ lesz. Mivel f és $6-f$ paritása azonos, ezért a rácsban a fehér pontok számának paritása az átfestések során nem változik meg. Ezek szerint, ha a rácsban eredetileg a fehér pontok száma páratlan volt, akkor minden átfestés után is páratlan marad, azaz nem lehet 0.

b) A csupa fekete pontokból álló rácsot pontosan azokból a színezésekből kiindulva lehet előállítani, amelyek a feketére festett rácsból nyerhetők a feltételben leírt módon. Az eljárás olyan, hogy a lépések sorrendje nem befolyásolja a végeredményt, másrészt ugyanannak a sornak, illetve oszlopnak a kétszeri átfestése elhagyható. Így feltehető, hogy minden sort és oszlopot legfeljebb egyszer festünk át.
Az oszlopok és a sorok együttes száma 12, így összesen 2^{12}-féleképpen adhatjuk meg, hogy mely oszlopokat illetve sorokat kell átfesteni, tehát legfeljebb 2^{12} olyan színezése van a rácsnak, amiből a tiszta fekete rács előállítható.
Ugyanakkor a rács 36 pontját 2^{36}-féleképpen lehet két színnel kiszínezni, és ezen esetek felében található páros darab sötét pont az ábrán.
Mivel $2^{12} < 2^{35}$, ezért a *b*) esetben is nemleges válasz adható a feladat kérdésére.

15. *Egy szabályos tizenkétszög csúcsait kiszínezzük pirossal vagy kékkel. Határozzuk meg azon színezések számát, amelyek során nem keletkezik egyszínű csúcsokkal rendelkező szabályos sokszög.*

Megoldás:

Jelöljük a szabályos tizenkétszög csúcsait A_i-vel. (i = 1, 2, …, 12) Elég azon esetek számát megszámolnunk, amikor nem keletkezik egyszínű szabályos háromszög és négyzet, mivel ekkor szabályos hatszög és tizenkétszög sem alakul ki. A csúcsok 4 szabályos háromszöget és három négyzetet határoznak meg. Ezek a következők:

$H_1 : A_1A_5A_9$
$H_2 : A_2A_6A_{10}$
$H_3 : A_3A_7A_{11}$
$H_4 : A_4A_8A_{12}$
$N_1 : A_1A_4A_7A_{10}$
$N_2 : A_2A_5A_8A_{11}$
$N_3 : A_3A_6A_9A_{12}$

Egy szabályos háromszög csúcsait $2^3 = 8$-féleképpen színezhetjük ki, ezek közül kettőnél csak egy színt használunk fel, így a megfelelő esetek száma 6, a 4 háromszöget tekintve pedig .
Jelölje S_j (j=1,2,3) azon színezések halmazát, amikor az N_j négyzet egyszínű, de a szabályos háromszögek egyike sem ilyen. Mivel minden négyzet esetén a 4 csúcs mindegyike különböző szabályos háromszöghöz tartozik, ezért $\left|S_j\right| = 2 \cdot 3^4 = 162$, mivel a négyzet csúcsainak egynemű színét 2-féleképpen, a szabályos háromszögek 2-2 további csúcsának kifestését pedig $2^2 - 1 = 3$-féleképpen választhatjuk ki. $\left|S_k \cap S_l\right| = 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 2^4 = 34$, ugyanis

- ha a két egyszínű négyzet 4-4 csúcsa azonos módon lett befestve (2-féle választási lehetőség), akkor a négy háromszög egy-egy kimaradó csúcsa csak a másik színnel jelölhető meg (1-1-féle választási lehetőség).
- ha a két egyszínű négyzet nem azonos módon lett befestve (2-féle választási lehetőség), akkor a négy háromszög egy-egy kimaradó csúcsa az eddigi vegyes színezés miatt mindkét színnel megjelölhető (2-2-féle választási lehetőség).

$\left|S_1 \cap S_2 \cap S_3\right| = 2^3 - 2 = 6$, mivel a 3 egyszínű négyzet színezésénél figyelni kell arra, hogy az ne legyen egységes, hiszen különben lehetne egyszínű szabályos háromszög is. A logikai szita formulát alkalmazva:

$$\left|S_1 \cup S_2 \cup S_3\right| = \left|S_1\right| + \left|S_2\right| + \left|S_3\right| - \left(\left|S_1 \cap S_2\right| + \left|S_1 \cap S_3\right| + \left|S_2 \cap S_3\right|\right) +$$
$$+\left|S_1 \cap S_2 \cap S_3\right| = 3 \cdot 162$$

Így a megfelelő színezések száma: $1296 - 390 = 906$.

16. *Egy kör kerületét 3k számú pontjával 3k olyan ívre osztottuk, amelyeken belül nincs további osztópont. Az ívek közül k darabnak 1 egységnyi a hossza, k darabnak 2 egységnyi, a többié 3 egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy az osztópontok közül van olyan kettő, amelyek egy átmérőt határoznak meg.*

Megoldás:

Színezzük ki a $3k$ osztópontot pirosra, azokat a pontokat pedig, amelyek a piros végpontú íveket egységnyi hosszúságú részekre osztják, feketére. Mivel két szomszédos piros pont között k esetben nincs fekete pont, k esetben 1 és k esetben 2 van, a fekete pontok száma $k + 2k = 3k$. A piros és fekete pontok együtt egy $6k$ csúcsú szabályos sokszöget határoznak meg. Húzzuk meg a kör $3k$ piros pontjából kiinduló átmérőjét, és tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy nincs köztük olyan, amelyiknek mindkét végpontja piros volna. Ez azt jelenti, hogy a sokszög minden piros csúcsával átellenben fekete található és – mivel ugyanannyi piros csúcs van, mint fekete – minden fekete csúccsal átellenben piros.
A szabályos $6k$-szög oldalait két csoportba osztjuk: az elsőbe azok kerüljenek, amelyek végpontjai egyező színűek – legyenek ezek az E oldalak – a másodikba pedig azok, amelyek végpontjai különböző színűek – ezek pedig a K oldalak. Mivel piros csúccsal szemben fekete van, feketével szemben pedig piros, azért az E oldallal szemközt is E oldal, K oldallal szemközt pedig K oldal van.
Az eredeti felosztás minden egységnyi hosszúságú ívéhez E oldal tartozik, és ugyancsak E oldal rendelhető minden 3 hosszúságú ív középső részéhez is. Így az E oldalak száma $2k$, a $6k$-szög többi $4k$ oldala pedig K oldal.
Jelöljük A-val a körív egyik piros osztópontját és legyen az A-ból induló átmérő másik végpontja B. Föltevésünk szerint B fekete. Számoljuk le a körön a K oldalakat először A-tól B-ig, majd tovább B-től A-ig. K oldallal szemben K oldal van, ezért a K oldalak száma A-tól B-ig ugyanannyi, mint B-től A-ig, azaz $4k$ fele, vagyis $2k$. Ez azt jelenti, hogy A-tól B-ig haladva a csúcsok színe $2k$-szor, azaz páros sokszor változik. Ha tehát A piros volt, akkor mivel páros sok színváltás után jutunk a vele szemben levő B-hez, B-nek is pirosnak kell lennie. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis van a körben olyan átmérő, amelynek mindkét végpontja piros.