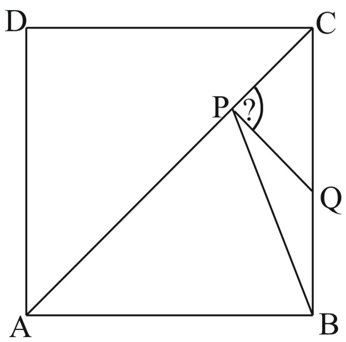
Geometriai versenyfeladatok 7-8. osztályosoknak

Károlyi Károly, Bátaszék

1. feladat

Az *ABCD* négyzet *AC* átlóján lévő *P* pontra igaz, hogy $AP = AB$. A *BC* oldalon lévő *Q* pontra igaz, hogy *PQ* merőleges *AC*-re. Igazoljuk, hogy a *PC*, *PQ*, *BQ* szakaszok egyenlők!

Megoldás:



$$AP = AB \text{ és } PAB\angle = 45°,$$

ezért

$$ABP\angle = BPA\angle = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°.$$

$$QPB\angle = QPA\angle - BPA\angle = 90° - 67{,}5° = 22{,}5°$$

,

valamint

$$PBQ\angle = ABQ\angle - ABP\angle = 90° - 67{,}5° = 22{,}5°,$$

így *PBQ* háromszög egyenlő szárú, azaz $BQ = PQ$.

$$QCP\angle = 45° \text{ és } CPQ\angle = 90°,$$

ezért

$$PQC\angle = 45°,$$

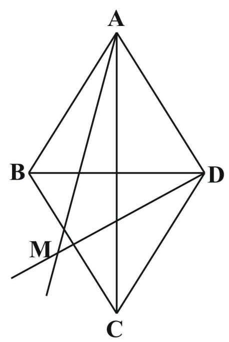
így a *PQC* háromszög egyenlő szárú, azaz $PC = PQ$.

$$PC = PQ \text{ és } BQ = PQ \text{, így } PC = PQ = BQ.$$

2. feladat

Adott az *ABCD* rombusz. Hány fokos szöget zárnak be a *BAC* és *BDC* szögek szögfelezői?

Megoldás:



Legyen $BAD\angle = \alpha$ és a kérdéses szögfelezők metszés pontja *M*! Ekkor $ADC\angle = 180° - \alpha$.
Tudjuk, hogy a rombusz átlói felezik a szögeket, így

$$MAD\angle = \frac{3}{4}\alpha \text{ és } ADM\angle = \frac{3}{4}(180° - \alpha)$$

Ezekből következik, hogy

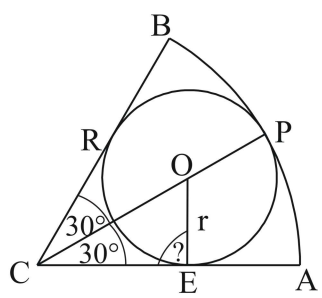
$$AMD\angle = 180° - MAD\angle - ADM\angle =$$
$$= 180° - \frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}(180° - \alpha) = 45°.$$

Tehát a *BAC* és *BDC* szögek szögfelezői 45°-os szöget zárnak be.

3. feladat

Egy 60-os középponti szögű körcikk területe $100\,cm^2$. Mekkora annak a körcikkbe írható körnek a területe, amely érinti a körcikk két határoló sugarát és a körívét is?

Megoldás:



A beírt kör a körívet *P*-ben érinti. A szimmetria miatt *CP* felezi a középponti szöget és *O* rajta van *CP*-n
Mivel a sugár merőleges az érintőre, ezért *CEO* háromszög szögei 30°, 60° és 90°, azaz a háromszög egy szabályos háromszög „fele”.
Így $CO = 2r$.
Ebből következik, hogy $R = CO + OP = 3r$.
A körcikk területe:

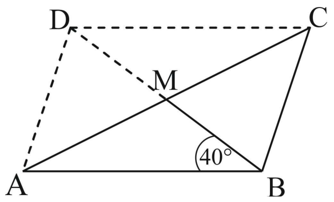
$$T = \frac{R^2 \cdot \pi}{6} = \frac{9r^2 \cdot \pi}{6} = 100\ cm^2.$$

Tehát a beírt kör területe: $t = r^2 \cdot \pi = \frac{6}{9} \cdot 100\ cm^2 = \frac{200}{3} cm^2$.

4. feladat

Az ABC háromszögben BM súlyvonal fele az AB oldalnak, valamint az $ABM\angle = 40°$. Határozzuk meg az ABC szöget!

Megoldás:



Tükrözzük a háromszöget az M pontra!
Jelölje a B csúcs tükörképét D!
A tükrözés miatt, $DB = 2 \cdot BM$, a feltétel miatt $AB = 2 \cdot BM$. Így $AB = DB$, azaz ABD háromszög egyenlő szárú.
Ebből következik, hogy

$$DAB\angle = (180° - 40°) : 2 = 70° .$$

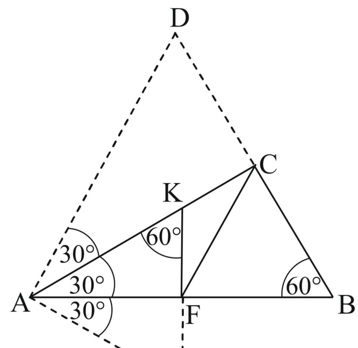
A tükrözésnél keletkezett $ABCD$ négyszög paralelogramma, így

$$ABC\angle = 180° - 70° = 110° .$$

5. feladat

Az ABC derékszögű háromszögben $\alpha = 30°$, az AB átfogó felezőmerőlegese az AC befogót K-ban metszi. Milyen arányban osztja K az AC befogót?

Megoldás:



Az AB felezőpontját jelölje F!

$$FKA\angle = 180° - KAF\angle - AFK\angle = 60°$$

és

$$ABC\angle = 180° - BCA\angle - CAB\angle = 60°.$$

Az AFK derékszögű háromszög az ALK szabályos háromszög „fele”, ezért $AK = 2FK$. ABC derékszögű háromszög az ABD szabályos háromszög „fele”, így $CB = \frac{1}{2} AB = FB.$ Emiatt FBC háromszög szabályos, azaz $BCF\angle = CFB\angle = 60°$.
Ebből

$$KFC\angle = KFB\angle - CFB\angle = 90° - 60° = 30°$$

és

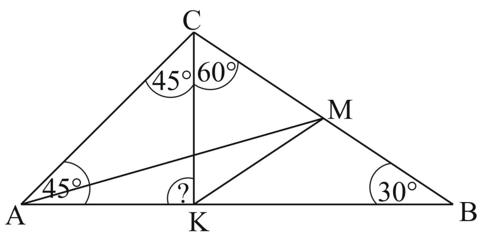
$$FCK = BCK\angle - BCF\angle = 90° - 60° = 30°.$$

Következésképpen a CKF háromszög egyenlő szárú, azaz $KC = FK$. Tehát $AK = 2FK = 2KC$, azaz a K pont 2:1 arányban osztja AC-t.

6. feladat

Az ABC háromszögben az $ABC\angle = 30°$, a $CAB\angle = 45°$ és M a BC oldal felezőpontja. Határozd meg az AMC szög nagyságát!

Megoldás:



A C-ből az AB-re állított merőleges talppontja K.
Az AKC háromszög egyik szöge 45°, a másik 90°, akkor a harmadik szöge $180° - 45° - 90° = 45°$, így a háromszög egyenlő szárú, azaz $AK = KC$.
A KBC háromszög egyik szöge 30°-os, a másik 90°-os, a harmadik $180° - 30° - 90° = 60°$-os, így ez egy „fél” szabályos háromszög. Ebből következik, hogy $BC = 2 \cdot KC$. Mivel M felező-pontja BC-nek, ezért $KC = MC$. Így a KMC háromszög egyenlő szárú és a szárszöge 60°, tehát egyenlő oldalú.
Ebből következik, hogy $KC = KM$, valamint $CKM\angle = KMC\angle = 60°$.
Mivel $AK = KC$ és $KC = KM$, ezért $AK = KM$, azaz AKM háromszög egyenlő szárú és a szárszöge

$$AKM\angle = AKC\angle + CKM\angle = 90° + 60° = 150°.$$

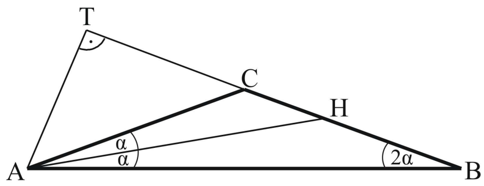
Így $KMA\angle = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Tehát $AMC\angle = KMC\angle - KMA\angle = 60° - 15° = 45°$.

7. feladat

Az ABC háromszögre igaz, hogy $AC = BC$. Az A csúcsához tartozó magasságvonal T-ben, a belső szögfelező pedig H-ban metszi a BC oldalegyenesét. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit, ha tudjuk, hogy AT fele olyan hosszú, mint AH!

Megoldás:

A magasságvonal merőleges az oldalegyenes-re, így *AHT* derékszögű háromszög. A feltétel szerint *AT* befogó fele olyan hosszú, mint AH átfogó, így *AHT* egy „fél” szabályos háromszög.



Emiatt $TAH\angle = 60°$ és $AHT\angle = 30°$.
Legyen $CAB\angle = 2\alpha$! Mivel $AC = BC$, ezért $ABC\angle = CAB\angle = 2\alpha$. Az *AH* szögfelező, ezért $HAB\angle = \alpha$. Az $AHT\angle$ külső szöge az *ABH* háromszögnek, így

$$AHT\angle = HAB\angle + ABH\angle = \alpha + 2\alpha = 3\alpha .$$

Mivel $AHT\angle = 30°$, ezért $\alpha = 10°$.
Tehát $CAB\angle = ABH\angle = 2\alpha = 20°$ és $BCA\angle = 180° - 2 \cdot 20° = 140°$.

Megjegyzés:

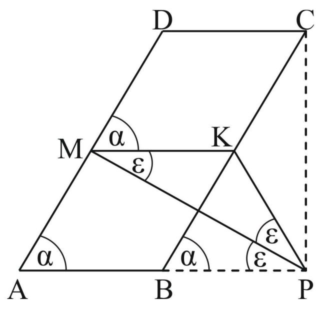
Ha *T* a *BC* oldal belső pontja lenne, akkor az *A* csúcsnál lévő belső szög fele nagyobb lenne 60°-osnál, azaz *A*-nál és *B*-nél is tompaszögek lennének, ami nem lehetséges.

8. feladat

Az *ABCD* paralelogramma *BC* oldala kétszerese a *CD* oldalnak. *M* az *AD* oldal felezőpontja. A *C* pontból merőlegest állítunk az *AB* oldal egyenesére. A merőleges az oldalegyenest *P* pontban metszi. Igazoljuk, hogy *DMP* szög háromszorosa az *APM* szögnek!

Megoldás:

Legyen $DAB\angle = \alpha$, $APM\angle = \varepsilon$ és *BC* oldal felezőpontja *K*! A felezőpontokat összekötő *MK* szakasz a paralelogramma középvonala, így *MK* párhuzamos *AB*-vel, illetve *AP*-vel. Ebből következik, hogy
$DMK\angle = DAB\angle = \alpha$ (egyállású szögek) és $KMP\angle = APM\angle = \varepsilon$ (váltószögek).
A középvonal hossza egyenlő a párhuzamos



oldal hosszával, így $MK = AB = a$. A feltétel szerint, pedig $KB = a$ is fennáll.
Mivel *BPC* háromszög derékszögű, ezért Thalész tételének megfordítása miatt a *BC* átfogó *K* felezőpontja a háromszög köré írható körének középpontja.
Ebből következik, hogy $KB = KP = KC = a$.
Mivel $MK = KP = a$, ezért *MPK* egyenlő szárú háromszög.
Így $MPK\angle = KMP\angle = \varepsilon$. $KBP\angle = DAB\angle = \alpha$, mert egyállású szögek.
A *BPK* háromszög szintén egyenlő szárú, mert $KB = KP = a$. Ebből következik, hogy

$$KBP\angle = BPK\angle = APM\angle + MPK\angle ,$$

azaz

$$\alpha = 2\varepsilon .$$

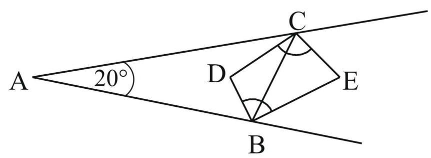
Ezt felhasználva

$$DMP\angle = DMK\angle + KMP\angle = \alpha + \varepsilon = 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

Tehát *DMP* szög háromszorosa az *APM* szögnek.

9. feladat

Az *ABC* háromszögben $BAC\angle = 20°$, a *B*-nél és *C*-nél lévő szögek belső szögfelezői a *D* pontban, külső szögfelezői pedig az *E* pontban metszik egymást. Számítsuk ki a *BECD* négyszög belső szögeinek nagyságát!



Megoldás:

$$CDB\angle = 180° - DBC\angle - BCD\angle = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} =$$

$$= 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2} = 90° + \frac{20°}{2} = 100°$$

$$DBE\angle = DBC\angle + CBE\angle = \frac{\beta}{2} + \frac{180° - \beta}{2} = 90°$$

és

$$ECD\angle = BCD\angle + ECB\angle = \frac{\gamma}{2} + \frac{180° - \gamma}{2} = 90° ,$$

ezekből

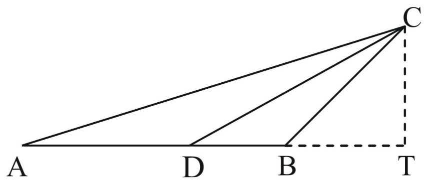
$$BEC\angle = 360° - 100° - 2 \cdot 90° = 80° .$$

Tehát a *BECD* négyszög belső szögeinek nagysága: 100°, 90°, 90°, 80°.

10. feladat

A háromszög egyik szöge 120°-kal nagyobb a másiknál. Igazoljuk, hogy a háromszög harmadik csúcsából húzott magassága fele a harmadik csúcsból húzott szögfelező három-szögbe eső szakaszának!

Megoldás:



Legyen $CAB\angle = \alpha$!
A feltétel szerint $ABC\angle = \alpha + 120°$.

Így

$$BCA\angle = 180° - \alpha - (\alpha + 120°) = 60° - 2\alpha .$$

Mivel *CD* felezi a szöget, ezért

$$DCA\angle = (60° - 2\alpha) : 2 = 30° - \alpha .$$

A $CDB\angle$ külső szöge az *ADC* háromszögnek, ezért

$$CDB\angle = \alpha + (30° - \alpha) = 30° .$$

Mivel a *CT* magasság merőleges az *AB* egyenesére, ezért *DTC* derékszögű háromszög, amelynek egyik szöge 30°-os. Így ez egy szabályos háromszög „fele”, amiből következik, hogy *DC* kétszer olyan hosszú, mint *CT*.
Tehát a háromszög harmadik csúcsából húzott magassága fele a harmadik csúcsból húzott szögfelező háromszögbe eső szakaszának.

11. feladat

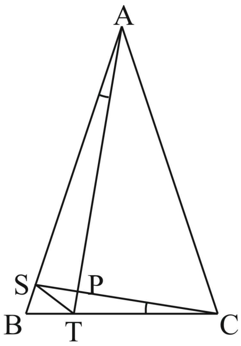
Az *ABC* háromszögben $AB = AC$ és a $BAC\angle = 40°$. A háromszög *AB* illetve *BC* oldalán felvesszük az *S* illetve *T* pontokat úgy, hogy $BAT\angle = BCS\angle = 10°$. Az *AT* és az *SC* egyenesek metszéspontja *P*. Bizonyítsuk be, hogy $BT = 2 \cdot PT$!

Megoldás:

ABC háromszög egyenlő szárú és $BAC\angle = 40°$, ezért

$$ABC\angle = BCA\angle = (180° - 40°) : 2 = 70° .$$

Mivel $BCS\angle = BAT\angle = 10°$,
ezért $PCA\angle = BCA\angle - BCS\angle = 60°$



és

$$CAP\angle = BAC\angle - BAT\angle = 30° .$$

Így

$$APC\angle = 180° - PCA\angle - CAP\angle = 90° ,$$

azaz *APC* háromszög és ezzel együtt *TPS* háromszög is derékszögű.

$ABT\Delta \sim BCS\Delta$, mert $ABC\angle$ közös és $BAT\angle = BCS\angle$.

Ebből következik, hogy $\frac{BT}{BS} = \frac{AB}{BC}$. Innen és abból, hogy *B*-nél lévő szögük közös az következik, hogy $TSB\Delta \sim ABC\Delta$. Így *TSB* háromszög is egyenlő szárú, azaz $TS = TB$, illetve

$$TSB\angle = SBT\angle = 70° .$$

$$CSB\angle = 180° - SBC\angle - BCS\angle = 100° ,$$

ebből

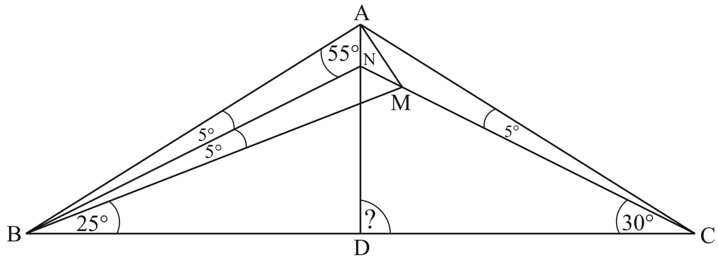
$$PST\angle = CSB\angle - TSB\angle = 100° - 70° = 30° .$$

Tehát *TPS* derékszögű háromszög egyik szöge 30°, azaz ez egy „fél” szabályos háromszög, amelynek *TS* átfogója a *PT* befogó kétszerese, így $BT = TS = 2 \cdot PT$.

12. feladat

Adott az *ABC* háromszög, amelyben $AB = AC$ és $CAB\angle = 110°$. A háromszög belsejében levő *M* pontra fennáll, hogy $MCB\angle = 30°$ és $MBC\angle = 25°$. Határozd meg az $AMB\angle$ -et!

Megoldás:



Megrajzoljuk a háromszög *AD* szimmetriatengelyét. Ez felezi a szárszöget, ezért

$$DAB\angle = DAC\angle = 55° ABC\angle = ACB\angle = (180° - 110°) : 2 = 35° .$$

CM egyenes *N* pontban metszi *AD*-t. *N* rajta van a *BC* felezőmerőlegesén, ezért $NB = NC$.
Így

$$NBC\angle = NCB\angle = MCB\angle = 30° .$$

Innen

$$ABN\angle = ABC\angle - NBC\angle = 35° - 30° = 5° .$$

Az

$$NBM\angle = NBC\angle - MBC\angle = 30° - 25° = 5° ,$$

így

$$ABN\angle = NBM\angle .$$

Mivel $BMN\angle$ külső szöge az *MBC* háromszögnek, ezért

$$BMN\angle = MBC\angle + MCB\angle = 55° .$$

$$ABN\Delta \cong NBM\Delta ,$$

mert

$$ABN\angle = NBM\angle = 5° ,\ NAB\angle = BMN\angle = 55°$$

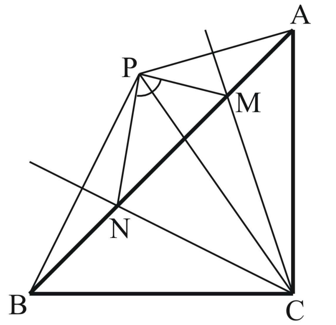
és *BN* oldaluk közös. Ebből következik, hogy $AB = MB$, azaz *ABM* háromszög egyenlő szárú.
Tehát

$$AMB\angle = (180° - ABM\angle) : 2 = (180° - 10°) : 2 = 85° .$$

13. feladat

Az *ABC* egyenlő szárú derékszögű háromszög *AB* átfogóján úgy helyezkednek el az *M* és *N* pontok, hogy $MCN\angle = 45°$ (*M* az *A*-hoz, *N a B*-hez van közelebb). Igazoljuk, hogy $MN^2 = AM^2 + NB^2$!

Megoldás:



Tükrözzük az *A* csúcsot az *M*C egyenesre! Az *A* képét *Q*-val jelölve

$$QC = AC \text{ és } QCM\angle = ACM\angle .$$

Tükrözzük a *B* csúcsot az *NC* egyenesre! A *B* képét *R*-rel jelölve $RC = BC$ és

$$RCN\angle = BCN\angle .$$

Ha $ACM\angle = \delta$, akkor $QCM\angle = \delta$, és ha $BCN\angle = \varepsilon$, akkor $RCN\angle = \varepsilon$ is fennáll.
Ha *Q* és *R* nem esik egybe, akkor $MCN\angle = \delta + \varepsilon + QCR\angle$ (*Q* az *A*-hoz, *R* a *B*-hez van közelebb) vagy $MCN\angle = \delta + \varepsilon - QCR\angle$ (*Q* a *B*-hez, *R* az *A*-hoz van közelebb).
A feltétel szerint $MCN\angle = 45°$, így $ACB\angle = 90° - QCR\angle$ vagy $ACB\angle = 90° + QCR\angle$.
Tehát mivel $ACB\angle = 90°$, ezért *Q* és *R* ugyanaz a pont. Jelöljük ezt a pontot *P*-vel!
A tükrözés miatt

$$MPC\angle = MAC\angle = 45° \text{ és } NPC\angle = NBC\angle = 45°.$$

Így

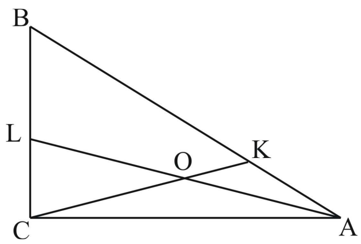
$$MPN\angle = MPC\angle + NPC\angle = MAC\angle + NBC\angle = 90°,$$

azaz *NMP* háromszög derékszögű. Pitagorasz tétele szerint $MN^2 = PM^2 + PN^2$.
A tükrözés miatt $PM = AM$ és $PN = NB$, tehát $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

14. feladat

Az *ABC* derékszögű háromszög *AB* átfogóján felvettük azt a *K* pontot, amelyre $KC = BC$. Az *A* csúcsból induló belső szögfelező a *BC* oldalt *L* pontban metszi. Tudjuk, hogy *KC* szakasz felezi az *AL* szakaszt. Határozd meg az *ABC* háromszög hegyesszögeit!

Megoldás:



Jelöljük a *KC* és az *AL* szakaszok metszéspontját *O*-val és az *A*-nál levő szöget 2α-val! *O* rajta van a szögfelezőn, ezért $OAC\angle = \alpha$.
Mivel *O* felezőpont és *LCA* háromszög derékszögű, ezért $CO = AO = LO$ (Thalész tételének megfordítása miatt).
Így *CAO* háromszög egyenlő szárú, azaz $OCA\angle = OAC\angle = \alpha$.
A $CKB\angle$ külső szöge *CAK* háromszögnek, ezért

$$CKB\angle = KCA\angle + CAK\angle = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Mivel $KC = BC$, azaz *KBC* háromszög egyenlő szárú, ezért $KBC\angle = CKB\angle = 3\alpha$.
A derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege

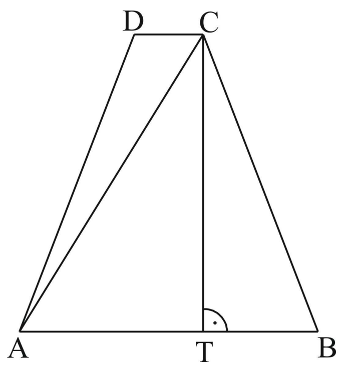
$$CAB\angle + ABC\angle = 2\alpha + 3\alpha = 5\alpha = 90°,$$

amiből $\alpha = 18°$. Tehát a két hegyesszög nagysága 36° és 54°.

15. feladat

A húrtrapéz átlója felezi a trapéz tompaszögét. A trapéz kisebbik alapja 3 cm, a kerülete 42 cm. Határozd meg a trapéz területét!

Megoldás:



AC felezi a $BCD\angle$ -et, ezért $BCA\angle = ACD\angle$.
A $CAB\angle = ACD\angle$, mert váltószögek.
Így $BCA\angle = CAB\angle$, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú. A húrtrapéz szimmetriáját is figyelembe véve $BC = AD = AB$.
Így a kerület
$K_{ABCD} = 3 \cdot AB + DC = 3 \cdot AB + 3\ cm = 42\ cm.$
Ebből $AB = (42\ cm - 3\ cm) : 3 = 13\ cm$.

Az egyenlő szárú trapéz CT magasságát behúzva
$$BT = (AB - DC) : 2 = (13\ cm - 3\ cm) : 2 = 5\ cm.$$

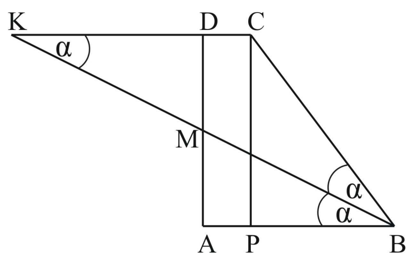
BCT derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét:
$$CT = \sqrt{BC^2 - TB^2} = \sqrt{(13\ cm)^2 - (5\ cm)^2} = 12\ cm.$$

Tehát a trapéz területe
$$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CT = \frac{13\ cm + 3\ cm}{2} \cdot 12\ cm = 96\ cm^2.$$

16. feladat

Az $ABCD$ trapéz szárai $AD = 8$ egység, $BC = 10$ egység, a DC rövidebb alap 2 egység hosszúságú. Az $ABC\angle$ szögfelezője felezi az AD oldalt. Határozd meg a trapéz területét!

Megoldás:



Jelölje AD felezőpontját M, az MB és CD egyenesek közös pontját K!
$CKB\angle = ABK\angle$, mert váltószögek és $KBC\angle = ABK\angle$, mert KB szögfelező. Ezekből $CKB\angle = KBC\angle$, azaz KBC

háromszög egyenlő szárú, így $KC = BC = 10$.
Mivel $DC = 2$, ezért $KD = KC - DC = 10 - 2 = 8$.
Az M felezi AD oldalt, így

$$DM = MA. \; DKM\angle = ABM\angle \text{ és } KMD\angle = BMA\angle ,$$

mert csúcsszögek. Ezek miatt $DKM\Delta \cong ABM\Delta$. Így $KD = AB = 8$.
Húzzunk párhuzamost a DA oldallal a C ponton keresztül! Ez az AB alapot a P pontban metszi. A keletkező PBC háromszög oldalai:

$$PB = AB - AP = AB - DC = 8 - 2 = 6, \quad BC = 10 , \quad PC = AD = 8 .$$

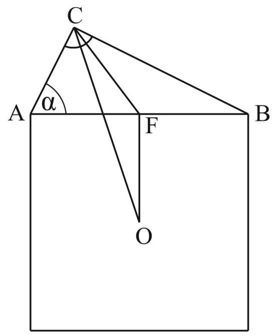
Az oldalakra teljesül, hogy $6^2 + 8^2 = 10^2$, azaz $PB^2 + PC^2 = BC^2$. Így Pitagorasz tételének megfordítása miatt a PBC háromszög derékszögű. Ebből következik, hogy a CP szakasz a trapéz magassága.
Tehát a trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CP = \frac{8+2}{2} \cdot 8 = 40 .$$

17. feladat

Rajzolj egy derékszögű háromszög átfogójára kifelé, az átfogóval megegyező oldalú négyzetet! Kösd össze a derékszögű háromszög derékszögű csúcsát a négyzet középpontjával! Bizonyítsd be, hogy ez az összekötő szakasz felezi a derékszöget!

Megoldás:



A négyzet középpontját O-val, az AB átfogó felezőpontját F-fel, a háromszög A-nál lévő szögét α-val jelöljük és C-t összekötjük F-fel.
ABC háromszög derékszögű, ezért Thalész tételének megfordítása miatt F az ABC háromszög köré írt körének középpontja. Így $AF = CF$, azaz AFC háromszög egyenlő szárú, amiből következik, hogy FCA szög is α. Ebből $AFC\angle = 180° - 2\alpha$.
Így

$$OFC\angle = OFA\angle + AFC\angle = 90° + 180° - 2\alpha = 270° - 2\alpha$$

Mivel

$$FO = \frac{AB}{2} = AF \text{ és } AF = CF ,$$

ezért $FO = CF$, azaz OFC háromszög egyenlő szárú, így

$$FCO\angle = COF\angle = \frac{180° - OFC\angle}{2} = \frac{180° - (270° - 2\alpha)}{2} = \alpha - 45°.$$

Tehát

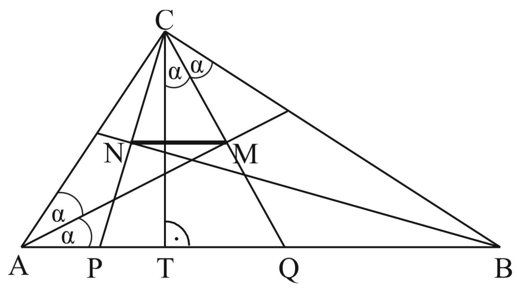
$$OCA\angle = FCA\angle - FCO\angle = \alpha - (\alpha - 45°) = 45°,$$

azaz *CO* szakasz valóban felezi a *BCA* derékszöget.

18. feladat

Az *ABC* derékszögű háromszög *AB* átfogójához tartozó magasság talppontja *T*. A *CAB* szög és a *BCT* szög szögfelezői az *M* pontban, a *CBA* szög és az *ACT* szög szögfelezői az *N* pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy *NM* párhuzamos *AB*-vel!

Megoldás:



Az $ACT\angle$ szögfelezője *P* pontban, a $BCT\angle$ szög-felezője *Q* pontban metszi az *AB* átfogót. $CAB\angle = BCT\angle$, mert merőleges szárú hegyesszögek.

Így

$$CAM\angle = MAQ\angle = BCQ\angle = QCT\angle = \alpha.$$

$$TCA\angle = 90° - 2\alpha,$$

ezért

$$MCA\angle = \alpha + 90° - 2\alpha = 90° - \alpha.$$

Így

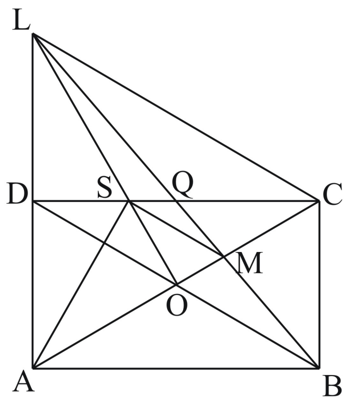
$$AMC\angle = 180° - CAM\angle - MCA\angle = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°,$$

azaz az *AQC* háromszög *AM* szögfelezője egyben magassága is, ami azt jelenti, hogy *M* a *CQ* oldal felezőpontja.
Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy *N* a *CP* oldal felezőpontja. Így *NM* szakasz a *PQC* háromszög középvonala, tehát *NM* párhuzamos *PQ*-val, azaz *AB*-vel is.

19. feladat

Az $ABCD$ téglalap középpontja O és a $DAC\angle = 60°$. A DAC szög szögfelezője a DC egyenest az S pontban metszi. Az OS és AD egyenesek metszéspontja L, a BL és AC egyenesek metszéspontja pedig M. Igazoljuk, hogy SM és CL egyenesek párhuzamosak egymással!

Megoldás:



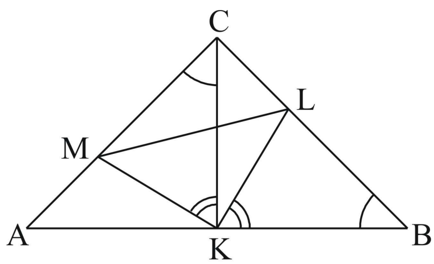
Az ACD derékszögű háromszögben $DAC\angle = 60°$ és AS szögfelező, ezért $SAC\angle = ACS\angle = 30°$. Így ACS háromszög egyenlő szárú. Mivel O az AC oldal felezőpontja, ezért OS egyenes az ACS háromszög magasságvonala, ami egyben az AC szakasz szakaszfelező merőlegese. Ennek egyik pontja L, amely így A-tól és C-től egyenlő távolságra van. Ebből következik, hogy az ACL háromszög egyenlő szárú, és mivel $LAC\angle = 60°$, ezért az ACL háromszög szabályos.
Mivel $CD \perp LA$, ezért CD az ACL háromszög egy másik magassága. A szabályos háromszögek magasságai egyben súlyvonalai is, ezért OL és CD szakaszok S metszéspontja a háromszög súlypontja. A súlypont a súlyvonalakat 2 : 1 arányban osztja, ezért az S pont az OL szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja.
Mivel ACL háromszög szabályos és $ABCD$ téglalap, ezért $LD = DA = CB$, valamint LD és CB párhuzamosak. Így $BCLD$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért Q a DC oldal felezőpontja. Ebből következik, hogy BQ a BCD háromszög egyik súlyvonala. Mivel O felezi AC-t, ezért CO a BCD háromszög egy másik súlyvonala. Ezekből következik, hogy M a BCD háromszög súlypontja. Így az M a CO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja.

Mivel $\dfrac{OS}{OL} = \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{1}{3}$ és $SOM\angle = LOC\angle$, ezért $SOM\Delta \sim LOC\Delta$, amiből következik, hogy $OMS\angle = OCL\angle$. Mivel a szögek nagysága egyenlő és egyik száruk egy egyenesbe esik, ezért a másik száruk párhuzamos. Tehát SM és CL egyenesek párhuzamosak egymással.

20. feladat

Az *ABC* egyenlő szárú derékszögű háromszög *AB* átfogójának felezőpontja *K*. A *BC* illetve *AC* befogókon a megfelelő *L* illetve *M* pontokra igaz, hogy $BL = CM$. Igazoljuk, hogy az *LMK* háromszög szintén egyenlő szárú derékszögű!

Megoldás:



ABC egyenlő szárú háromszög, ezért $ABC\angle = CAB\angle = 45^\circ$, valamint a *CK* az átfogóhoz tartozó magassága és a derékszögű csúcs szögét is felezi.
Ebből következik, hogy
$CKB\angle = AKC\angle = 90°$
és
$KCB\angle = KCA\angle = 45°$.

Mivel $KCB\angle = KBC\angle = 45°$, ezért *KBC* háromszög is egyenlő szárú, így $KB = KC$.
Mivel $KBL\angle = KCM\angle = 45°$, $KB = KC$ és a feltétel szerint $BL = CM$, ezért $KBL\Delta \cong KCM\Delta$.
Ebből következik, hogy $KL = KM$. Tehát *KLM* háromszög egyenlő szárú.
Mivel

$$KBL\Delta \cong KCM\Delta \text{, ezért } LKB\angle = MKC\angle .$$

Emiatt

$$MKL\angle = MKC\angle + CKL\angle = LKB\angle + CKL\angle = CKB\angle = 90°,$$

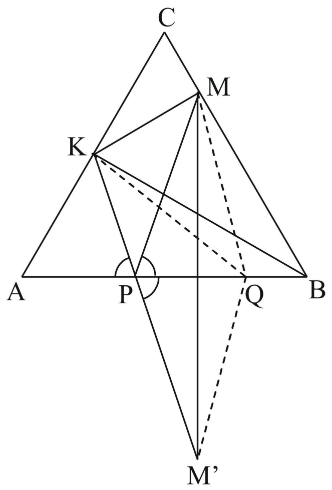
azaz *LMK* háromszög derékszögű.
Tehát az *LMK* háromszög szintén egyenlő szárú derékszögű.

21. feladat

Az *ABC* egyenlő oldalú háromszög *AC* oldalának felezőpontja *K*, a *BC* oldal *M* pontjára pedig igaz, hogy *CM : MB = 1 : 3*. Az *AB* oldalon vegyük fel a *P* pontot úgy, hogy a *PKM* háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen. Milyen arányban osztja a *P* pont az *AB* oldalt?

Megoldás:

A *KM* rögzített szakasz, ezért a háromszög kerülete akkor lesz a legkisebb, ha a *KPM* törött vonal a legrövidebb.



Az M pontot az AB egyenesre tükrözve a kapott M' pontot összekötjük K-val. Az AB-vel való metszéspont lesz a P pont.
Ekkor

$$KP + PM = KP + PM' = KM'.$$

Ha Q egy P-vel nem egyenlő másik pontja az AB szakasznak, akkor

$$KQ + QM = KQ + QM' > KM',$$

mert QKM' háromszög két oldalának összege a háromszög-egyenlőtlenség szerint nagyobb a harmadik oldalnál. Tehát KPM háromszög kerülete a legkisebb.
A tükrözés miatt $MPB\angle = M'PB\angle$,
másrészt $APK\angle = M'PB\angle$,
mert csúcsszögek, így $APK\angle = MPB\angle$.
Mivel

$$APK\angle = MPB\angle \text{ és } KAP\angle = PBM\angle = 60°, \text{ ezért } APK\Delta \sim BPM\Delta.$$

Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik, így

$$AP : PB = AK : BM = \frac{1}{2}a : \frac{3}{4}a = 2 : 3.$$

Tehát a P pont 2 : 3 arányban osztja az AB oldalt.

22. feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, a körülírt kör középpontja O. Igazoljuk, hogy az AOC törött vonal két egyenlő részre osztja a négyszög területét!

Megoldás:

Ha AOC egy egyenesre illeszkedik, akkor AOC olyan egyenes szakasz, amely a húrnégyszöget két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, így a területét nyílván felezi.
Ha O és B az AC egyenes által meghatározott két különböző félsíkba esik, akkor AC és BD szakaszok metszéspontját K-val, az O-ból az AC-re, illetve a BD-re bocsátott merőlegesek talppontjait M-mel és N-nel jelöljük. Mivel $OA = OC = r$, ezért AOC háromszög egyenlő szárú, így OM felezi a húrnégyszög AC átló-ját. Hasonlóan N felezi a BD átlót.

Mivel a húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, ezért *NOMK* négyszög téglalap, így $MO = KN$.

$$T_{ABCO} = T_{ABC} + T_{ACO} =$$
$$= \frac{AC \cdot BK}{2} + \frac{AC \cdot MO}{2} = \frac{AC \cdot (BK + MO)}{2} = \frac{AC \cdot (BK + KN)}{2} =$$
$$= \frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{AC \cdot \frac{1}{2} \cdot BD}{2} = \frac{T_{ABCD}}{2}$$

Ha *O* és *B* az *AC* egyenes azonos félsíkjába esik, akkor ugyanígy kell eljárni.
Tehát az *AOC* törött vonal két egyenlő részre osztja a négyszög területét.

23. feladat

Az *ABCD* négyszögben

$$DAB\angle = 130°,\ CDA\angle = 70°,\ BCD\angle = 80° \text{ és } AB = BC.$$

Számítsuk ki a *BDA* szög nagyságát!

Megoldás:

Legyen *E* a *CD* oldal azon pontja, amelyre $EBC\angle = 20°$!
Ekkor

$$CEB\angle = 180° - EBC\angle - BCE\angle = 80°,$$

így a *BCE* háromszög egyenlő szárú, ezért $BE = BC$.
Az

$$ABC\angle = 360° - BCD\angle - CDA\angle - DAB\angle = 80°.$$

Ebből

$$ABE\angle = ABC\angle - EBC\angle = 80° - 20° = 60°.$$

Mivel $BE = BC$ és $AB = BC$, ezért $AB = BE$, valamint $ABE\angle = 60°$, így *ABE* háromszög szabályos. Ebből következik, hogy

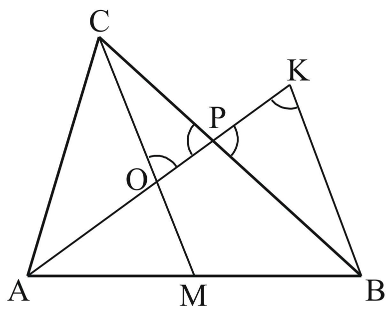
$$EAB\angle = 60° \text{ és } EA = AB.$$
$$DAE\angle = DAB\angle - EAB\angle = 130° - 60° = 70°$$

és a feltétel szerint $EDA\angle = 70°$, így EDA háromszög egyenlő szárú, azaz $ED = EA = AB = BE$. Ebből következik, hogy BED háromszög egyenlő szárú, azaz $EDB\angle = DBE\angle$.
Mivel
$$BED\angle = 180° - CEB\angle = 180° - 80° = 100°,$$
ezért
$$EDB\angle = DBE\angle = (180° - 100°) : 2 = 40°.$$
Tehát
$$BDA\angle = EDA\angle - EDB\angle = 70° - 40° = 30°.$$

24. feladat

Az *ABC* háromszög *AB* oldalának felezőpontja *M*, a *BC* oldalának egyik pontja *P*. Az *AP* és *CM* szakaszok az *O* pontban metszik egymást úgy, hogy $CO = CP$. Határozzuk meg az *OM* : *PB* arányt!

Megoldás:



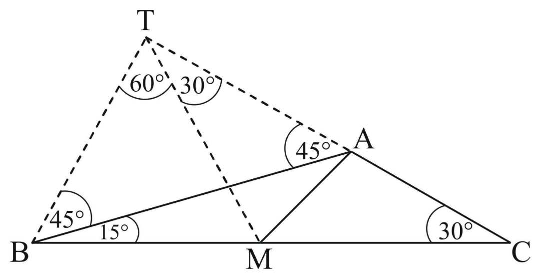
A *B* ponton át párhuzamost húzunk *CM*-mel. Ez az *AP* egyenest *K* pontban metszi.
A feltétel szerint a *COP* háromszög egyenlő szárú,
ezért $COP\angle = OPC\angle$.
Mivel $CO \parallel KB$,
ezért $COP\angle = BKP\angle$ (váltószögek).
Az $OPC\angle = KPB\angle$, mert csúcsszögek.
Ezekből következik, hogy
$$KPB\angle = OPC\angle = COP\angle = BKP\angle,$$

azaz *PBK* háromszög egyenlő szárú, amiből $PB = KB$.
Mivel *M* az *AB* oldal felezőpontja és $MO \parallel BK$, ezért *MO* az *ABK* háromszög középvonala. Így $KB = 2 \cdot OM$.
Tehát $PB = KB$ és $KB = 2 \cdot OM$, amiből $PB = 2 \cdot OM$, azaz $OM : PB = 1 : 2$.

25. feladat

Az *ABC* háromszög szögei: $\beta = 15°$, $\gamma = 30°$. Legyen *M* a *BC* oldal felezőpontja! Igazoljuk, hogy az *ABC* és *MAB* háromszögek hasonlók!

Megoldás:



Állítsunk merőlegest *B*-ből az *AC* egyenesére, metszéspontjuk legyen T! Mivel $\gamma = 30°$, ezért *BCT* derékszögű három-szög egy „fél” szabályos háromszög.

Ebből következik, hogy

$$BC = 2 \cdot TB \text{ és } TBC\angle = 60° .$$

Az *M* felezi *BC*-t, ezért $BC = 2 \cdot BM$, így $TB = BM$.
Ebből és a $TBC\angle = 60°$ -ból következik, hogy *TBM* háromszög egyenlő oldalú.
Így $TM = TB$ és $MTB\angle = 60°$.
A $BAT\angle$ külső szöge az *ABC* háromszögnek,
ezért

$$BAT\angle = \beta + \gamma = 15° + 30° = 45° ,$$

valamint $ATB\angle = 90°$, ezért *ATB* egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $TA = TB$.
Mivel $TM = TB$ és $TA = TB$, ezért $TM = TA$, azaz *TMA* egyenlő szárú háromszög, amiből következik, hogy $TMA\angle = MAT\angle$.
Másrészt

$$ATM\angle = ATB\angle - MTB\angle = 90° - 60° = 30° .$$

Ezekből következik, hogy

$$MAT\angle = (180° - ATM\angle) : 2 = (180° - 30°) : 2 = 75° .$$

Így

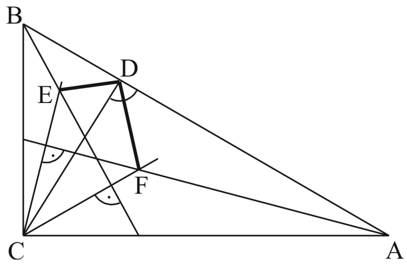
$$MAB\angle = MAT\angle - BAT\angle = 75° - 45° = 30° .$$

Tehát *MAB* háromszög két szögének nagysága 15° és 30°, azaz megegyeznek az *ABC* háromszög szögeinek nagyságával, így a két háromszög hasonló.

26. feladat

Az *ABC* derékszögű háromszög átfogója *AB*. A *C* pontból az α szög szögfelezőjére húzott merőleges a β szög szögfelezőjét *E* pontban, a *C* pontból a β szög szögfelezőjére húzott merőleges az α szög szögfelezőjét *F* pontban metszi. *D* a *C* pontból húzott magasság talppontja. Bizonyítsuk be, hogy $FD \perp DE$!

Megoldás:



$BCD\angle = CAB\angle = \alpha$,
mert merőleges szárú hegyes-szögek.

$ECD\angle = FAD\angle = \frac{\alpha}{2}$,
mert szintén merőleges szárú hegyesszögek. Ezekből következik, hogy

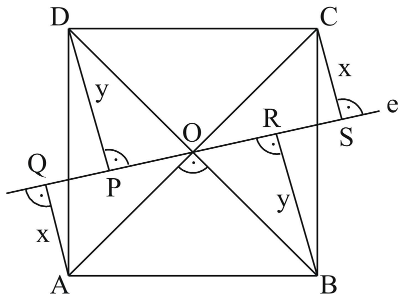
$$BCE\angle = BCD\angle - ECD\angle = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

azaz $BCD\angle$ szögfelezője a CE egyenes. Mivel E a $BCD\angle$ és a $DBC\angle$ szögfelezőjének metszéspontja, így DE egyenes a BCD háromszög harmadik szögének szögfelezője.
Tehát $CDE\angle = CDB\angle : 2 = 90° : 2 = 45°$.
Teljesen hasonlóan DF egyenes az $ADC\angle$ szögfelezője, így $FDC\angle = 45°$.
Tehát $FDE\angle = FDC\angle + CDE\angle = 45° + 45° = 90°$, azaz $FD \perp DE$.

27. feladat

Egy egységnyi oldalú négyzet középpontján áthalad egy *e* egyenes. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak *e*-től mért távolságai négyzetének összegét!

Megoldás:



Legyen $AQ = x$ és $BR = y$! Mivel az ábra *O*-ra közép-pontosan szimmetrikus, ezért $CS = x$ és $DP = y$.
A négyzet átlói egyenlő hosszúak, felezik egymást és egy-másra merőlegesek, ezért $AO = BO$ és $AOQ\angle = OBR\angle$ (merőleges szárú hegyesszögek).
Mivel

$$AO = BO,\ AOQ\angle = OBR\angle \text{ és } OQA\angle = BRO\angle = 90^\circ,$$

ezért $AOQ\Delta \cong OBR\Delta$. Ebből $QO = RB = y$.

A négyzet oldalának hossza 1, így $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Felírva az AOQ derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét azt kapjuk, hogy $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Tehát a kérdéses összeg $2x^2 + 2y^2 = 1$.