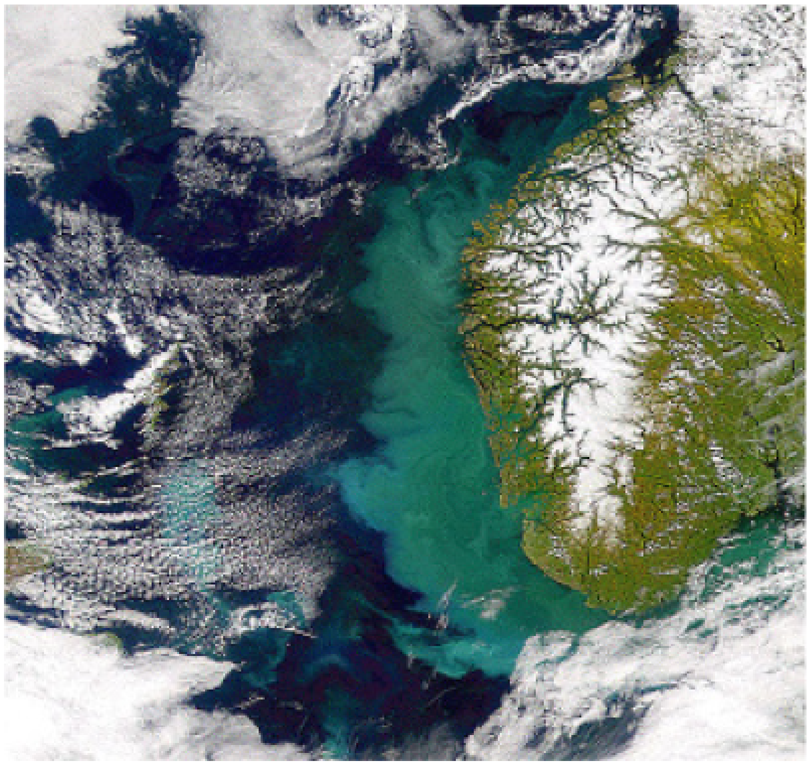
Máté László

Fraktáldimenziókról egyszerűen



http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/

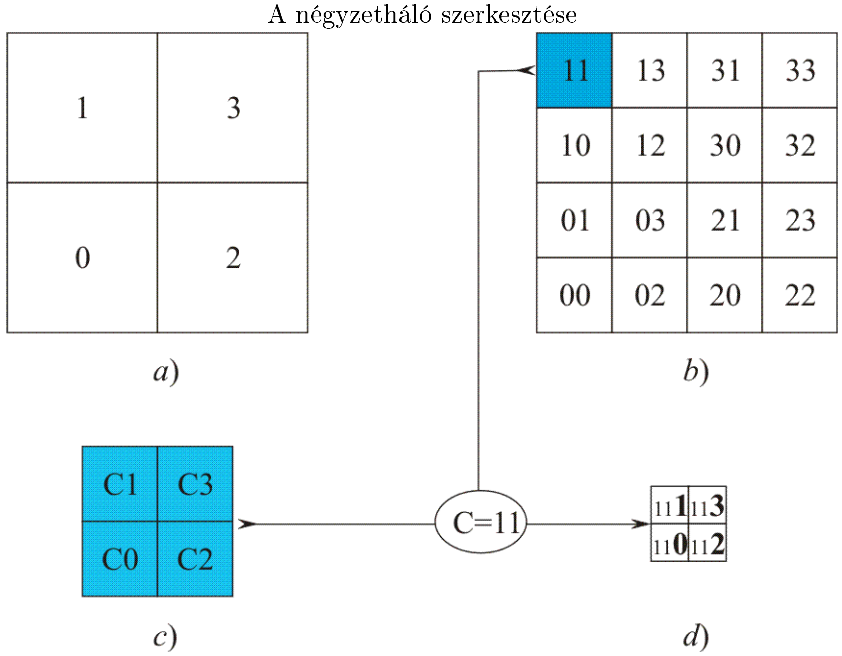
A modern matematikának csak nagyon kevés része illeszthető be a középiskolai matematikaoktatásba. Ezen kevesek közé tartozik a fraktálgeometria. A fraktálgeometriának két alapvető koncepciója van, az önhasonlóság és a fraktáldimenziók. A fraktáldimenzió a fontosabb és nehezebb fogalom, ezért esett erre a választás. Választásunkat még az is indokolja, hogy a fraktáldimenzió az u.n. hatványszabály egyik fontos példája, amelynek fontos szerepe van a modern matematikában, például a véletlen hálózatok dinamikájában. Így a négyzethálós modell, amelyet ismertetni fogunk, betekintést nyujthat a modern matematika egy fontos területére olymódon, hogy közben nem lépjük lényegesen túl a középiskolákban tanított matematikát.

A különböző fraktáldimenziók közül a boxdimenziót tárgyaljuk. Ez elemi eszközökkel számítható és a leggyakrabban alkalmazott fraktáldimenzió. Olyan halmazokon fogjuk bemutatni a boxdimenzió tulajdonságait és kiszámítását, amelyek szerkezetét tetszőleges finomságú négyzethálók határozzák meg úgy hogy belőlük, különböző rekurzív szabállyal, négyzetek sorozatát töröljük. Amint látni fogjuk, ezek a halmazok eléggé változatosak ahhoz, hogy a boxdimenzió minden problémája bemutatható rajtuk, viszont eléggé szabályosak, hogy bemutatásukhoz a matematikai analízis és mértékelmélet elkerülhető.

"Megmérhetetlen" halmazok

A négyzethálók szerkesztését az *1. ábra* mutatja be. Az egységnégyzetet a $0, 1, 2, 3$ jelekkel látjuk el, úgy ahogy azt az *1.a ábrán* látjuk, majd a következő rekurzív szabállyal folytatjuk. Ha $\mathcal{E}_n$ a sorozat n-edik eleme, akkor az $\mathcal{E}_n$ minden négyzetét lineárisan felezzük, majd az így kapott négy négyzethez jelsorozatot rendelünk úgy hogy a felosztás elötti négyzet C jeléhez, az *1.c ábra* szerint, hozzáfűzzük a $0, 1, 2, 3$ jel egyikét A négyzetekhez rendelt jelsorozatokat kódoknak fogjuk nevezni.

A négyzetháló szerkesztése



1. ábra

Az eljárás heurisztikus, vizuális háttere. Az eljárással a $0, 1, 2, 3$ jelekből alkotott szavak (jelsorozatok) mindegyikét el tudjuk helyezni az egységnégyzeten. A szavak egyre hosszabbak lesznek, a négyzetháló egyre sűrűbb lesz az eljárás folyamán és gyorsan eljutunk a megjelenítő eszköz (papír, képernyő, sit.) felbonthatóságának a határáig. *A négyzetrács azonban határtalanul nagyítható.* Nagyításkor egyre több részlet bukkan fel és megjelennek az egyre hosszabb szavakkal kódolható négyzetek.

Például, 00122311 egy

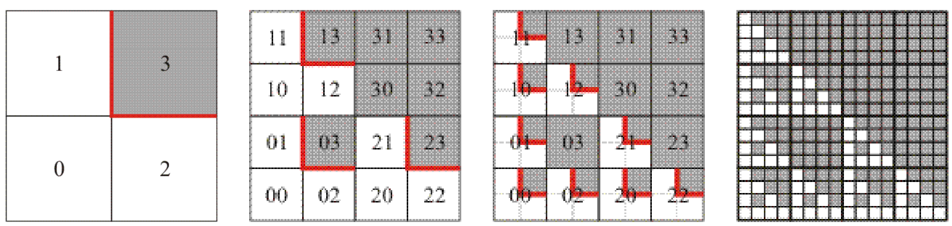
$$\frac{1}{2^8} \approx 0.004$$

oldalú négyzet kódja. Egy normál rajzlap méretű négyzeten sőt, a 1280×1024 pixelméretű képernyőn csupán néhány miliméter annak a négyzetnek az átmérője, amelynek kódja 00122311. A négyzetháló méretét arányosan nagyítva nemcsak elhelyezhető a 00122311, hanem újabb négyzetek bukkannak fel, az ennél hosszabb kódokhoz tartozó négyzetek.

Miután a $0, 1, 2, 3$ jelekkel felírható szavakat a leírt módon elhelyeztük az egységnégyzeten, hozzáfoghatunk tördimenziós halmazok előállításához.

Megadunk egy szót (jelsorozatot), amelyet tiltott szónak *fogunk nevezni, majd törlünk minden olyan négyzetet, amelynek kódja tartalmazza a tiltott szót.*

Töröljük a „3” jelet tartalmazó összes négyzetet (rekurzív módon)



2. a)	2. b)	2. c)	2. d)
terület: $\frac{3}{4}$	terület: $\left(\frac{3}{4}\right)^2$	terület: $\left(\frac{3}{4}\right)^3$	terület: $\left(\frac{3}{4}\right)^n$
:1	: $\frac{3}{2}$	: $\left(\frac{3}{2}\right)^2$	kerület $> \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

2. ábra

1. Első példaként töröljük mindazokat a négyzeteket, amelyek kódjában a *3* szerepel. Ez például a *2. ábrán* szemléltetett rekurzív eljárással végezhető el. A rekurzív szabály ekkor az lesz, hogy minden lépés után, a lineáris felezéssel kapott négy négyzet közül pontosan egyet (a lineáris felezés után kapott jobbfelső négyzetet) töröljük. Ugyanis, a rekurzív lépéssel kapott négy négyzet közül, pontosan ennek a kódja tartalmaz *3* jelet.

A 3 jelet tartalmazó *összes* négyzet törlésével kapott részhalmaz, a Sierpinski háromszög területe csak 0 lehet. Ugyanis a rekurzív szabállyal kapott négy új négyzet közül pontosan egy olyan van, amelynek kódja tartalmazza a *3* jelet. Ezért minden lépésben, a *3* jelet tartalmazó négyzetek törlése után megmaradó halmaz területe az előző háromnegyede lesz.

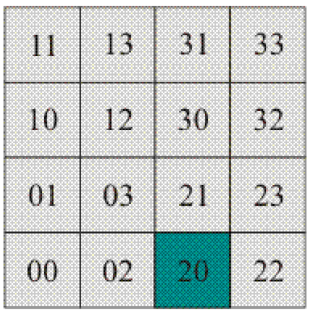
A szerkesztés során kapott sokszögek kerülete egyre növekszik, mindegyik közelítés kerülete az előzőnek legalább másfélszerese (*2. ábra*). Ezért minden M pozitív számhoz van n, hogy az n-edik rekurzív lépés után kapott sokszögek kerülete nagyobb mint M.

A Sierpinski háromszög méretére vonatkozó megállapításainkat röviden így fejezzük ki

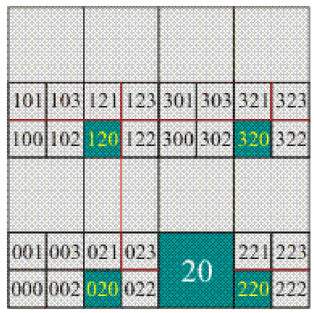
$$(MM) \qquad \textit{a terület } 0, \textit{ a kerület } \infty.$$

2. Most töröljük az *összes* olyan négyzetet, amelyek kódjában egy megadott *kétjegyű szám* szerepel. Legyen ez például *20*. A *3. ábrán* láthatjuk ezt a rekurzív folyamatot. A szürke halmazok azoknak a négyzeteknek az uniója, amelyek kódja tartalmazza a *20* jelet. Ellentétben a Sierpinski háromszög esetével, itt már nem annyira nyilvánvaló, hogy a négyzetek törlése után mennyi lesz a megmaradó halmaz területe.

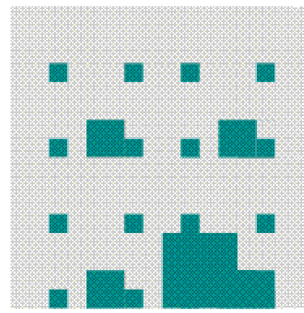
Töröljük a „20” kétjegyű számot tartalmazó összes négyzetet

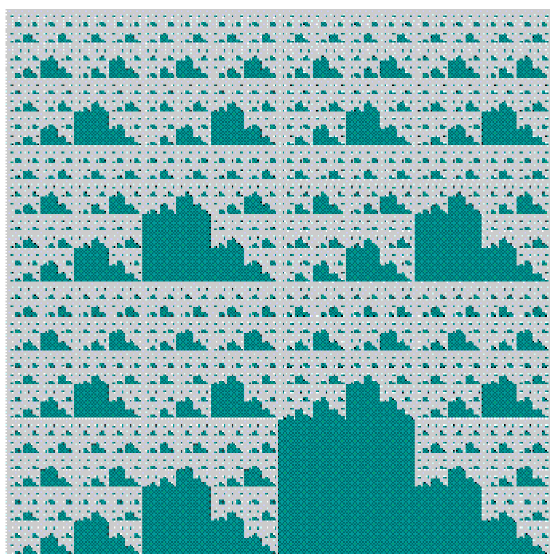


3. a)



3. b)
max. 3-jegyű kód


3. c)
max. 4-jegyű kód

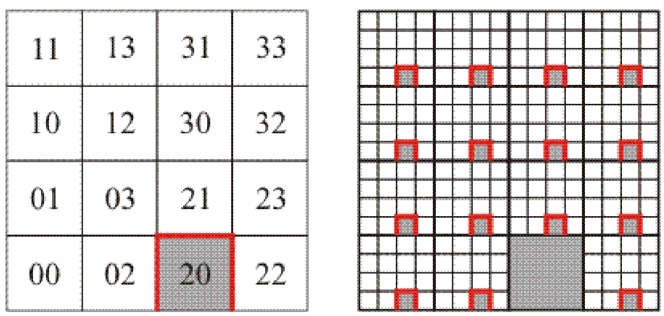

3. ábra

Hogyan oldottunk meg hasonló a problémát az előző példa, a Sierpinski háromszög esetében? Az előző példában, az egyre hosszabb szavak törlése után megmaradó halmazok területei geometriai sorozatot alkotnak, ahogyan azt a *2a ábra* is mutatja, a megfelelő halmazok kerületei viszont NEM. *Ezt a problémát* *úgy oldottuk meg, hogy kerületek helyett, a kerületek olyan részeit emeltük ki, amelyek mérőszámai geometriai sorozatot alkotnak* (*2b ábra*). Ezek voltak a kivastagított piros részek.

Próbáljunk itt is hasonló útat követni. NEM az összes 20 jelet tartalmazó négyzetet töröljük, hanem azoknak csupán egy olyan részhalmazát, amelyek törlése után megmaradó halmazok területei geometriai sorozatot alkotnak.

A rekurzív szabály páros számú *alkalmazásával minden előző négyzet helyére* 16 *új négyzet kerül, amelyek közül pontosan egy olyan van, amelynek kódja 20-ra végződik.* Így a 20-ra végződő kódokhoz tartozó négyzetek törlésével, minden páros számú lépés után, a megmaradó halmaz területe az előző halmaz területének tizenöt tizenhatod része lesz (*4. ábra*). Így a megmaradó halmazok területei egy $\frac{15}{16}$ hányadosú geometriai sorozatot alkotnak. Ebből következik, pontosan úgy, ahogy a Sierpinski háromszögnél, hogy az eljárás végén megmaradó halmaz területe, annak a halmaznak a területe, ami azután marad az egységnégyzetből, miután mindazokat a négyzeteket töröltük, amelyeknek a kódja páros hosszúságú és 20-ra végződik, csak 0 lehet.

Töröljük a „20" kétjegyű számra végződő összes négyzetet



4. a) 2-jegyű kód — 4. b) 4-jegyű kód

terület$=\frac{15}{16}$ — terület$=\left(\frac{15}{16}\right)^2$

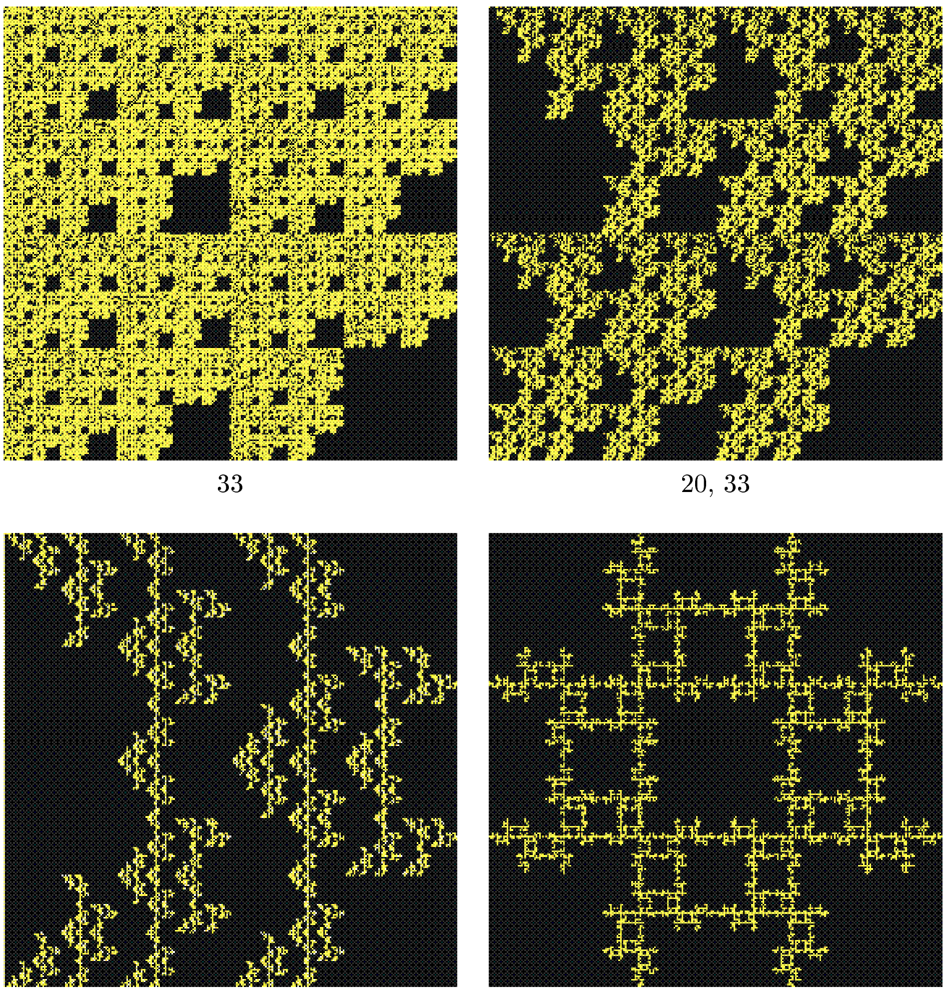
$: \frac{3}{4}$ — $> \frac{15}{4}\cdot\frac{3}{4}$

4. ábra

A kerület hosszának vizsgálatánál is ugyanígy járhatunk el. A szerkesztés során kapott sokszögek kerületének kivastagított piros részei tizenöt-negyedszeresen növekednek (*4 ábra*). Így akármilyen nagy pozitív számot mondunk, elég sok rekurzív lépés után, a kapott sokszögek kerületei ennél is nagyobbá válnak. Ezért a "*a terület* 0*, a kerület* ∞" tulajdonság itt is érvényes.

Ez a tulajdonság akkor is érvényes, amikor azt a halmazt tekintjük, amely akkor marad meg az egységnégyzetből, ha az *összes* 20 jelet tartalmazó négyzetet töröljük. Hiszen több négyzet törlésével a kapott halmaz területe csökken és kerülete pedig növekszik.

Az (MM) **heurisztikus, vizuális háttere.** A 20 jel törlésével kapott halmaz is határtalanul nagyítható. Ha a halmazból kezdetben csupán a legfeljebb hat hosszú szóval kódolt négyzetek láthatók, akkor nagyításkor előbukkannak az egyre hosszabb kódokhoz tartozó négyzetek is, mellettük a törölt négyzetek helyén támadt lyukakkal. Egyre több ilyen lyuk bukkan elő, rohamosan csökkenő átmérőkkel. Ebből a képből alakulhat ki az a sejtés, amit a fentiekkel igazoltunk, hogy a terület csakis nulla lehet, dacára a halmaz látszólag nagy kiterjedésének.



33

20, 33

20, 33, 11, 02

nem állhat egymás mellett
két azonos jel

5. ábra

3. Az *5. ábrán* az egységnégyzet különböző részhalmazait látjuk, amelyek úgy keletkeztek, hogy töröltük mindazokat a négyzeteket, amelyek kódja azokat az egy vagy több kétjegyű számot tartalmazza, amelyek a halmaz képe alatt láthatók.

A honlapomon található "FRACTALSHIFT" szoftverrel tömegesen gyárthatók ilyen mintázatok.
MEGJEGYZÉS. A "FRACTALSHIFT" kódolása különbözik az *1. ábra* kódolásától. Az *1a ábrán* 0123 helyett 2031 áll. Ezután a rekurzív szabály ezekkel a jelekkel folytatódik.

Feladatok. **1.** Igaz-e, hogy az *5. ábra* (világos) halmazainak a területe is csak nulla lehet?

2. Töröljük mindazokat a négyzeteket a négyzethálókból amelyek kódjában 33 áll. Mennyi lehet ekkor a kódolt négyzethálók közös részének a területe?

3. Töröljük mindazokat a négyzeteket a négyzethálókból amelyek kódjában 3333333 áll (hét darab 3 jel követi egymást). Mennyi lehet ekkor a kódolt négyzethálók közös részének a területe?

4. Van-e olyan szó, amelynek az a tulajdonsága, hogy törölve *minden* olyan négyzetet, amelynek kódja ezt a szót tartalmazza, pozitív területű halmaz marad az egységnégyzetből? Ha igen, akkor adjunk meg ilyen szavakat.

Megmutattuk, hogy a tiltott kódokhoz tartozó négyzetek törlésével nulla területű halmazokat kapunk, pedig ezek a halmazok nagyon különböző kiterjedésűek, különböző méretűnek látszanak. Különösen szembeszökő ez a *6. ábrán* bemutatott három halmaz esetén. A szokásos terület, vagy kerületméréssel nem határozható meg a méretkülönbségük, hiszen minden ilyen halmazra (MM) érvényes.

Hogyan lehet méret szerint megkülönböztetni az ilyen halmazokat?

A hatványszabály (*power law*)

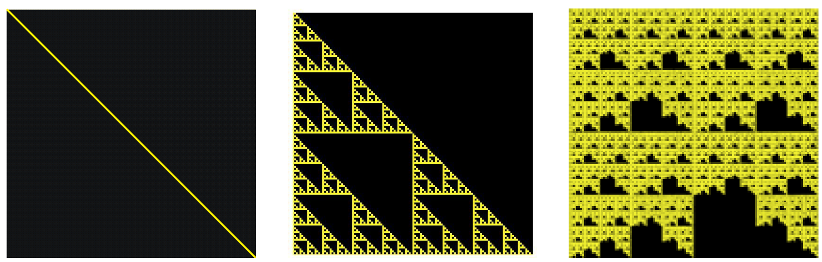
Legyen $r = 2^{-n}$; $(n = 1, 2, \ldots)$ és N_r azoknak az r-élű négyzeteknek a száma, amelyek a megadott jelet (vagy jeleket) tartalmazó, r-élű négyzetek törlése után maradnak az egységnégyzetben. Az (N_r, r) értékpárok határozzák meg a szóbanforgó halmazok területét. Ugyanis

$$N_r r^2$$

a szóbanforgó halmazok területének a közelítő értéke. Ez az érték annál pontosabb minél kisebb az r. Esetünkben ez a képlet csődöt mondott, hiszen a legváltozatosabb kiterjedésű halmazokra ugyanazt az értéket, a nullát adja.

Mégis, az intuiciónk azt sugalhatja, hogy további meggondolásainkat erre az értékpárra építsük, hiszen az r-élű négyzeteknek a száma, különböző r értékek mellett szoros kapcsolatban van, mondhatnám jellemzi, a szóbanforgó halmazok kiterjedését.

Néhány tipikus esetre megvizsgáljuk az $r \to N_r$ kapcsolatát (*6. ábra*).



egyenes, 0 és 3 a tiltott szavak — 3 a tiltott szó — 20 a tiltott szó

6. ábra

Az $\boxed{\text{egyenesszakasz}}$ esetén, (az egyenesszakasz úgy is szerkeszthető, hogy a 3,0 jelek valamelyikét tartalmazó négyzeteket töröljük a négyzethálók sorozatában)

$$ha\ \ r = \frac{1}{2^n}\ \ akkor\ \ N_r = 2^n = r^{-1}$$

amely a következő rekurzív formula megoldása

$$N_{2^{-1}} = 2 \quad N_{2^{-n}} = 2N_{2^{-n+1}} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Így, a felezésekkel kapott egyre sűrűbb négyzethálóból megmaradó négyzetlapok száma

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

A $\boxed{\text{Sierpinski háromszögnél}}$, amikor a 3 jelet tartalmazó összes négyzetet töröltük, a rekurzív szerkesztésből következik

$$(*) \qquad ha\ \ r = \frac{1}{2^n}\ \ akkor\ \ N_r = 3^n = r^{-c}$$

ahol

$$c = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849\ldots.$$

Ekkor az N_r-hez tartozó rekurzív formula

$$N_{2^{-1}} = 3 \quad N_{2^{-n}} = 3N_{2^{-n+1}} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

és ennek megoldása a (*), vagyis $N_{2^{-n}} = 3^n$.

Így, a felezésekkel kapott egyre sűrűbb négyzethálóból megmaradó négyzetlapok száma

$$3, 9, 27, 81, \ldots$$

A $\boxed{\text{20 jelet}}$ tartalmazó összes r élű négyzet törlése után megmaradó r élű négyzetek számának a meghatározása az előzőknél kicsit több megfontolást igényel.

Legyen

$$N^{\circ}_{2^{-n}} = 2^{2n} - N_{2^{-n}}$$

vagyis $N^{\circ}_{2^{-n}}$ az egységnégyzetből az n-edik lépésben törölt négyzetek száma. Ekkor

$$N^{\circ}_{2^{-n}} = 4N^{\circ}_{2^{-n+1}} + N_{2^{-n+2}}.$$

Ugyanis fele akkora élű négyzetekben mérve, az eddig törölt négyzetek száma négyszeres lesz, amihez hozzájönnek azok a négyzetek, amelyek éle $r = 2^{-n}$, kódja *20*-ra végződik és *egyetlen* 20 jelet tartalmaznak. Ez utóbbiak száma pontosan $N_{2^{-n+2}}$.

Könnyen elenőrizhető, hogy az eddig törölt négyzetek és azok a négyzetek, amelyek éle $r = 2^{-n}$, kódja *20*-ra végződik és *egyetlen* 20 jelet tartalmaznak diszjunkt halmazok és uniójuk minden olyan négyzetet tartalmaz, amelyek kódjában a 20 jel szerepel.

A mondottak alapján, a 20 jelet tartalmazó összes r élű négyzet törlése után megmaradó r élű négyzetek számára a következő rekurzív formulát kapjuk

$$(R) \qquad N_{2^{-n}} = 4N_{2^{-n+1}} - N_{2^{-n+2}}; \quad N_4 = 15,\ N_8 = 56 \qquad n = 4, 5, \ldots$$

ahol $N_{2^{-n}}$ a megmaradó négyzetek száma, amikor $r = 2^{-n}$.

Így, a felezésekkel kapott egyre sűrűbb négyzethálóból megmaradó négyzetlapok száma

$$15, 56, 208, 776 \ldots$$

(Érdemes még az egész négyzetlapra is megvizsgálni az $r \to N_r$ kapcsolatot. Valószínüleg nem igényelnek magyarázatot a következők

$$ha\ \ r = \frac{1}{2^n}\ \ akkor\ \ N_r = 2^{2n} = r^{-2}.$$

Így, ekkor az N_r-hez tartozó rekurzív formula

$$N_{2^{-1}} = 4 \quad N_{2^{-n}} = 4N_{2^{-n+1}} \quad n = 1, 2, \ldots .)$$

Az N_r értékek sorozata azt mutatja, hogy dacára annak, hogy minden bemutatott halmaz területe csak nulla lehet, az r élű négyzetek száma különbözik egymástól a bemutatott halmazoknál. Az N_r értékek sorozata gyorsabban növekszik akkor, amikor nagyobbnak látjuk az egyformán nulla területű halmazt.

Pontosabban, a halmaz területét egyre jobban közelítő $N_r r^2$ értékek a nullához közelednek mindhárom halmazban, ezért mindhárom halmaz területe csak nulla lehet. Adott r értékre viszont a területük közelítő értéke egymástól különböző, nagyobb akkor, ha a halmaz nagyobbnak *látszik*.

Feladatok. **1.** Adjunk meg rekurzív formulát a 33 tiltott szóhoz tartozó $\{N_r; \;\; r = 2^{-n} \;\; n = 1, 2, \ldots\}$ sorozatra.

2 Adjuk meg azokat a σ tiltott szavakat, amelyekhez tartozó halmazok $\{N_r; \;\; r = 2^{-n} \;\; n = 1, 2, \ldots\}$ sorozata megegyezik a 20 tiltott szóhoz tartozó sorozattal, vagyis (R)-el.

3 Töröljünk a négyzethálókból minden olyan négyzetet amelynek kódja tartalmazza a 3333333 jelet (ahol hét darab 3 jel követi egymást). Adjunk meg rekurzív formulát az $\{N_r; \;\; r = 2^{-n} \;\; n = 1, 2, \ldots\}$ sorozatra.

A boxdimenzió

A tárgyalt halmazok méretét jellemző $\{N_r; \;\; r = 2^{-n} \;\; n = 1, 2, \ldots\}$ sorozat elemei, az egyenesszakasz, a Sierpinski háromszög és a négyzetlap esetén, a rekurzív formúla mellett, *egyetlen* hatványfüggvénnyel is jellemezhetők. Azt kaptuk hogy

$$N_r = r^{-s}$$

ahol

$$\begin{gathered} s = 1 \text{ az egyenesszakasz,} \\ s = 1.5849\ldots \text{ a Sierpinski háromszög} \\ s = 2 \text{ a négyzetlap} \end{gathered}$$

esetén.

Vizsgáljuk meg, hogy a 20 tiltott szóhoz tartozó halmaz is jellemezhető-e egy hatványfüggvénnyel?

Behelyettesítve az r^{-s} $(r = 2^{-n})$ formulát (R)-be, a megfelelő egyszerűsítések után kapjuk

$$2^{2s} = 4.2^s - 1$$

aminek két megoldása van

$$2^s = 3.73\ldots \quad \text{és} \quad 2^s = 0.268\ldots.$$

Sajnos, ezek egyike sem jó megoldás hiszen ezekkel felírva a rekurzív sorozat első két elemét, azok

$$3.73^4 \text{ és } 3.73^8 \quad \text{ill.} \quad 0.268^4 \text{ és } 0.268^8$$

lesznek.

Észrevétel: *Bármely α, β számpárra*

$$N_{2^n} = \alpha 3.73^n + \beta 0.268^n$$

is megoldása (R)-nek.

Ezt az észrevételt alkalmazva, keressük azt az α, β számpárt, amelyre

$$(E) \qquad \begin{aligned} \alpha 3.73^2 + \beta 0.268^2 = &\quad 15 \\ \alpha 3.73^3 + \beta 0.268^3 = &\quad 56 \end{aligned}$$

és az (E) egyenletrendszernek pontosan egy α, β megoldása van.

Továbbá, nagy n-re a 0.268^n tag elenyészik. Például, $n \geq 16$ esetén $0.268^n < 10^{-9}$.

Arra az eredményre jutottunk, hogy az $\{N_r; \ \ r = 2^{-n} \ \ n = 1, 2, \ldots\}$ sorozat, a 20 tiltott szóhoz tartozó halmaz esetén, *nagy n értékekre* (vagyis elég sűrű négyzetrács esetére), *egyetlen* hatványfüggvénnyel jellemezhető

$$\{N_r = r^{-1.899\ldots}; \ \ r = 2^{-n} \ \ n = 1, 2, \ldots\}$$

jó közelítéssel. (32×32 hálózat esetén az eltérés kisebb, mint egyezred, 128×128 hálózat esetén az eltérés kisebb, mint tizezred, egységnek véve a négyzet oldalát.)

Mindhárom példánkban az $\{N_r; \ \ r = 2^{-n} \ \ n = 1, 2, \ldots\}$ növekedése egyetlen nemnegatív számmal, az s boxdimenzióval jellemezhető.

Azt a tulajdonságot, hogy

$$N_r \approx r^{-s}$$

ha r elég kicsi, hatványszabálynak és a s értéket a halmaz boxdimenziójának nevezzük.

Feladat.

Adjuk meg az egységnégyzetnek a 33 tiltott szóhoz és adjuk meg a 3333333 tiltott szóhoz tartozó részhalmazainak a boxdimemzióját.

Mit mér a boxdimenzió?

Az elmondottakból következik hogy *az s box-dimenzió az $N_r \to \infty$ sebességét méri.* Pontosabban, egy eléggé sűrű négyzetrácsból, nagyobb s boxdimenzió mellett, több négyzet szükséges a halmaz lefedéséhez, mint kisebb s mellett. Nagyobb s esetén N_r rohamosabban növekszik, ha r közeledik a nullához, mint kisebb s esetén. Ez akkor is érvényes, ha a halmazok területe nulla.

Egy kevésbé matematikus válasz arra, hogy mit mér a boxdimenzió. Egy halmazt adott felbontás mellett tudunk csak megfigyelni. A számítógép képernyőjén megjelenő kép megfigyelésének a képernyő pixelmérete, egy "valóságos" tárgy megfigyelésének pedig a szemünk felbontóképessége szab határt. Legyen h-átmérőjű az a legkisebb objektum, amelyet megfigyelni tudunk. Ez a nullához nagyon közeli érték. Így az elmondottak alapján nagyobb s mellett több lesz a halmazt lefedő h élű négyzetek N_h száma és így több ilyen négyzetet tudunk megfigyelni mint kisebb s boxdimenzió esetén. Igy valóban nagyobbnak látjuk a halmazt. Ez akkor is érvényes, amikor $s < 2$, vagyis a halmaz területe nulla. *Ezzel méret szerint is különbséget tudunk tenni olyan halmazok között is, amelyek mindegyikének területe nulla.*

Figyeljük meg, hogy az $N_r \to \infty$ sebességének mérésére a következő, egyre finomodó eljárások vannak:

Az első lépés: Az N_{2^k} leszámolása. (Ehez még rekurzív összefüggés sem kell)
A második lépés: A rekurzív formula. Ezzel olyan nagy k értékekre is számítható $N_{2^{-k}}$, amelyek már nem is láthatók. (Pl. $2^{-10} = 0.00097\ldots$ élű négyzethálóra.)
A harmadik lépés: A rekurzív formula "megoldása". Ez a hatványszabály, amikor egyetlen számmal, az s kitevővel adjuk meg az

$$N_{2^k} \to \infty \ \ ha \ \ k \to \infty$$

sebességet, amely jellemzi a nulla területű halmaz méretet.

Tetszőleges halmaz boxdimenziója.

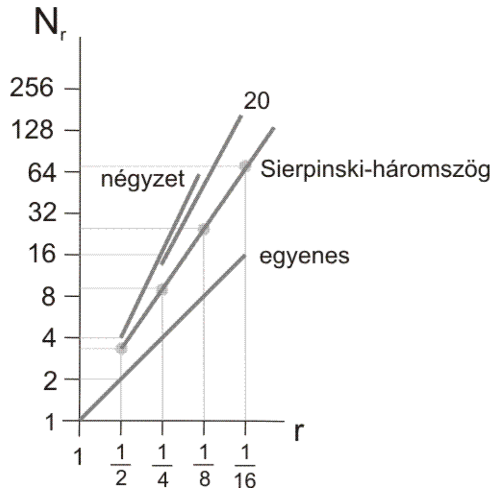
Egy a "termeszetben" előforduló objektum területe helyett boxdimenziót számolunk, ha $N_r r^2$ értéke a szokásos mértékegységben mérve "gyakorlatilag" nulla. Ekkor egy csökkenő

$$r_i; \ \ i = 1, 2, \ldots n$$

sorozatra határozzuk meg az N_r értékét, ahol $10 < n < 20$ szokásos. Az s értékét úgy kell meghatározni, hogy

$$(*) \qquad N_{r_i} \approx \alpha r_i^s.$$

Ez nehezen kivitelezhető feladat, hiszen nem könnyű egy *törtkitevőjű* hatvány függvény grafikonjának szerkesztése.



7. ábra

A (*) helyett ekkor az

$$(**) \qquad \log N_r \approx -s \log r + \log a$$

egyenletből határozzuk meg az s értékét. (**) szerint a $(-\log r, \log N_r)$ pontok egy s iránytangensű egyenesen vannak. Ennek alapján s egy olyan egyenes iránytángense, amelytől az

$$(-\log r_i, \log N_{r_i}); \quad i = 1, 2, \ldots n$$

négyzetes eltérése minimális (*7. ábra*).

MEGJEGYZÉSEK. I. Praktikusan az (r, N_r) pontokat tekintjük egy $\log, \log$ koordinátarendszerben.

II. A valóságban minden objektum háromdimenziós. Például, ceruzával akármilyen kis pontot rajzolva, grafitcsomót kapunk. Törtdimenziót akkor mérhetünk, ha egy nagyon lyukacsos halmaz területét (vagy térfogatát) akarjuk megmérni. Ekkor a $(-\log r_i, \log N_{r_i})$; $i = 1, 2, \ldots n$ pontok egy "bizonyos szakaszon" egy s iránytángensű egyenesen vannak. Ha ez a "bizonyos szakasz" hosszú, akkor az objektum törtdimenziós és dimenziója s. (Milyen hosszú ez a "bizonyos szakasz"?)

Kiegészítő irodalom.

1. Négyzethálós fraktálmodellek. (*Polygon 15. (25-41old.) 2007)*
2. www.math.bme.hu/ mate boxdim.pdf vkod.pdf

A kiegészítő irodalomban számos példát találunk a boxdimenzió alkalmazására.