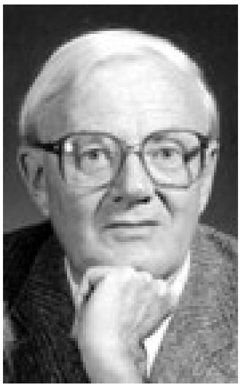
Lovász László
Gumiszalagoktól az algoritmusokig

Készítette Korándi Dániel és Hraskó András

Az előadást és az abból készült jegyzet elkészítését támogatta a
Budapest Bank Budapestért Alapítvány, a
Fővárosi Közgyűlés Oktatási Bizottsága és a
Typotex Elektronikus Könyvkiadó Kft.

Az előadás során Lovász László egy speciális szoftvert használt, amely letölthető a http://research.microsoft.com/research/downloads/Details/0D17AB26-0C7F-4D2F-A79C-AB3FA2ADD92D/Details.aspx címről. Használatához .NET 1.1 szükséges. Ez a szoftver valójában magát az előadást is tartalmazza angol nyelven.

Néhány példát mutatunk gráfelméleti problémák geometriai megközelítésére, és algoritmikus módszerek alkalmazására. Ezek számos pontok kapcsolódnak Tutte munkásságához.



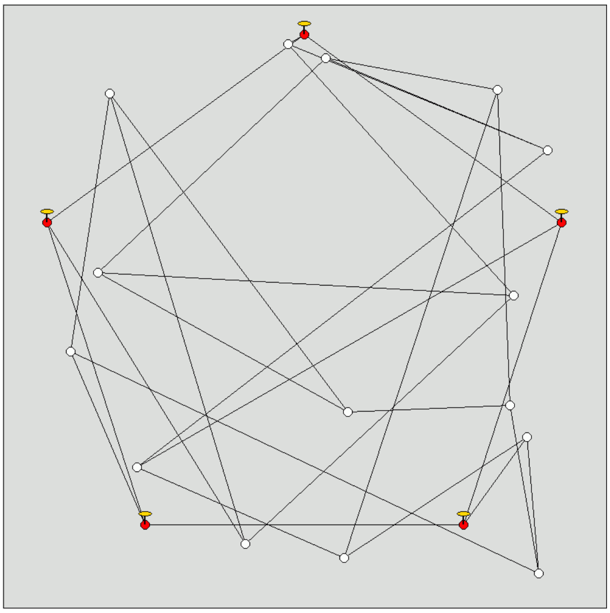
William Thomas Tutte(1917-2002), gráfelmélész, aki zárkózottságában is rendkívül érdekes egyéniség volt. Munkásságának jelentős pillanatai közül az angol kódfejtő központban, a II. világháború alatt alapvető tevékenységét emelhetjük ki.

W. T. Tutte a neten:
A MacTutor Matematikatörténeti archívum Tutte szócikke:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Tutte.html
A Wikipédia szócikke Tutte-ról:
http://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomas_Tutte
Arthur M. Hobbs és James G. Oxley: William T. Tutte, 1917-2002
www.math.lsu.edu/~oxley/ahjo.pdf

Síkbarajzolható gráfok

Tutte módszereit fogjuk alkalmazni a következőkben.

Tekintsük az 1. ábrán látható gráfot fizikai testnek, amelyben az élek gumiszalagok! A gumiszalagok olyan ideális anyagok, amelyek a hosszuk négyzetével arányos energiát tárolnak, s összehúzódással energiaminimumra törekszenek. Hosszuk akár nulla is lehet.

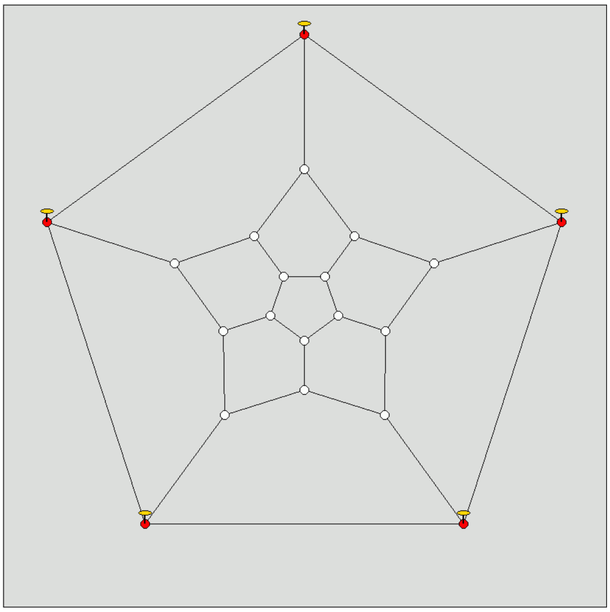


1. ábra

Képzeljük el, hogy a gráfot magára hagyjuk úgy, hogy a fehér csúcsokat elengedjük, a piros csomópontokat viszont továbbra is lerögzítjük! Mi fog történni a gráffal? Milyen egyensúlyi helyzetbe áll be?

Érdemes az említett szoftverrel kipróbálni, hogy mi történik. A végeredmény a 2. ábrán látható: felismerhetjük a dodekaéder élhálózatát.

Két alapvető kérdést szeretnénk tisztázni ezzel a fizikai algoritmussal kapcsolatban. Az első azt firtatja, hogy mitől függ, illetve nem függ az eljárás eredményeképp kapott rendszer, a másik arra vonatkozik, hogy mennyire „szép” a végezetül kapott ábra. Most pontosítjuk a kérdéseket.



2. ábra

Az eljárás bemenő adatait három csoportba oszthatjuk:

I. A gráf megadása: hány csúcsa van, melyek között vannak élek?

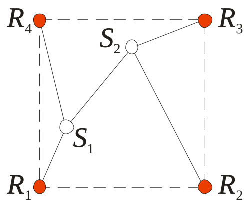
II. A rögzített pontok megadása: mely csúcsokat rögzítjük, a sík mely pontjára rögzítjük őket?

III. A szabad pontok megadása: a sík mely pontjaiban vannak az algoritmus elején a nem rögzített csúcsok?

Az algoritmus lefolyása természetesen függ mind a három típustól, az algoritmus eredménye pedig függ az I-II. típusba tartozó adatoktól is. Az első megválaszolandó kérdésünk a következő:

1. kérdés: Az algoritmus eredményeként kapott pontrendszer függ-e a III. típusba tartozó adatoktól, tehát a szabad pontok kezdeti elhelyezkedésétől?

Az alábbi feladat az 1. kérdés átfogalmazása egy konkrét, de nem triviális esetben:



3. ábra

1. feladat: A G gráfnak hat csúcsa van: r_1, r_2, r_3, r_4, s_1, s_2, és kilenc éle: r_1r_2, r_2r_3, r_3r_4, r_4r_1, r_1s_1, r_2s_2, r_3s_2, r_4s_1, s_1s_2. Az r_1, r_2, r_3, r_4 csúcsoknak feleltessük meg a sík

$$R_1(-1,-1),\ R_2(1,-1),\ R_3(1,1),\ R_4(-1,1)$$

pontjait! A G gráf s_1, s_2 csúcsainak a sík mely S_1, S_2 pontjait feleltessük meg, ha azt akarjuk, hogy az

$$E(S_1,S_2)=\overline{R_1S_1}^2+\overline{R_2S_2}^2+\overline{R_3S_2}^2+\overline{R_4S_1}^2+\overline{S_1S_2}^2$$

négyzetösszeg

a) minimális legyen? **b)** lokálisan minimális legyen?

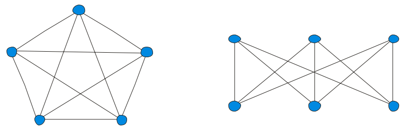
1. Megjegyzés: a fenti E kifejezés a nem rögzített szalagokban tárolt energiát fejezi ki.

2. Megjegyzés: a „lokálisan minimális” kifejezés azt jelenti, hogy ha az S_1, S_2 pontokat tetszőlegesen, de csak „kicsit” – tehát pl. egy rögzített ε értéknél kisebb távolságra elmozdítva – változtatjuk, akkor E értéke nő.

3. Megjegyzés: ha a rendszernek lenne lokális minimumhelye, akkor a fizikai rendszer annak kis környezetéből oda mozdulna.

A feladat megoldása a cikk végén olvasható.

Ismeretes, hogy vannak olyan gráfok, amelyeket bárhogy is rajzolunk le a síkba a gráf csúcsainak pontokat, az éleknek pedig a megfelelő pontok között futó folytonos görbéket megfeleltetve, a kapott ábrán mindig lesznek olyan vonalak, amelyek metszik egymást. Ilyen gráf pl. a teljes ötszög (K_5) és a „három ház három kút” gráf (Kuratowski gráf, $K_{3,3}$).



K_5 $K_{3,3}$

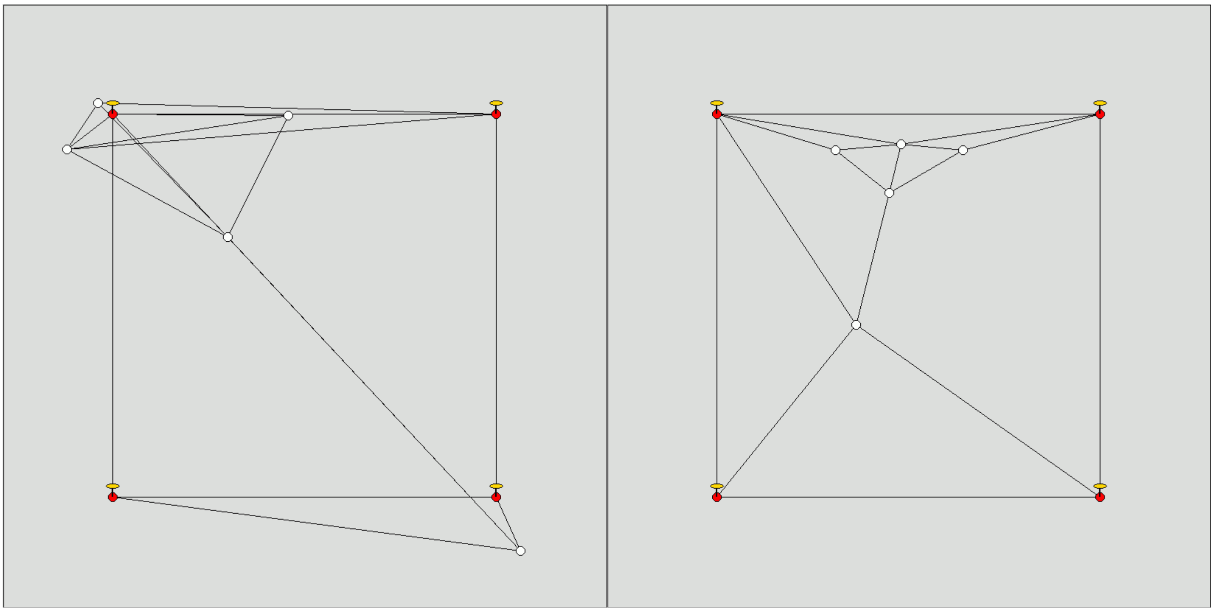
3. ábra

Kuratowski-tétele (pontosításért lásd az alábbi linkeket) lényegében azt mondja ki, hogy egy gráf akkor és csakis akkor rajzolható síkba, ha nem rejtőzik el benne a 3. ábrán látható egyik gráf sem.

Ajánló
Lovász László
Hajnal Péter: Gráfok síkbarajzolása, síkgráfok
http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/graf00/sikgraf.htm
Wikipédia Kuratowski tételéről:
http://en.wikipedia.org/wiki/Kuratowski%27s_theorem
A MacTutor Matematikatörténeti Archívum Kuratowskiról:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kuratowski.html

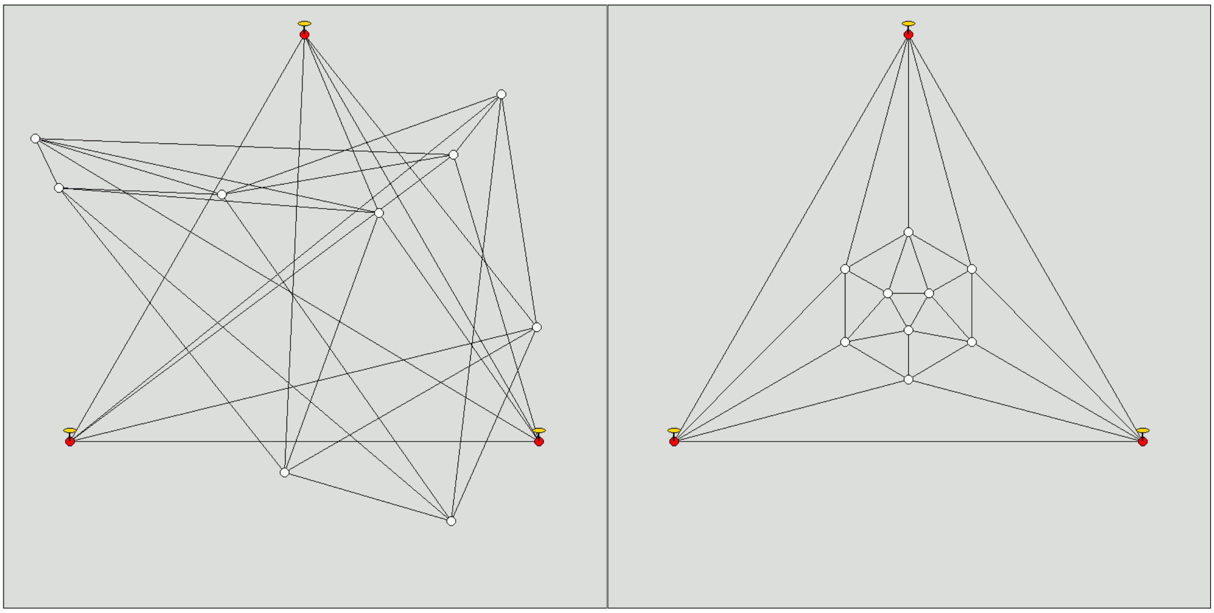
Második megválaszolandó kérdésünk az, hogy ha síkbarajzolható gráfból indulunk, akkor az eljárás eredményeképp kapott ábra vajon a gráf egy olyan síkbarajzolása lesz-e, amelyben az élek nem metszik egymást.

Még be kell látnunk, hogy a minimum minden esetben pontosan egyféleképpen jöhet létre.
A rendszer energiáját így írhatjuk: $\sum_{(i,j)\in H} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ (ahol H a gráf éleinek halmaza). Erről pedig tudjuk, hogy minden x_i vagy y_i változó szerint (a többit rögzítve) egy konvex parabola a képe, tehát pontosan egy minimuma van. A függvényt minden ilyen változó szerint lederiválva a következő kifejezést kapjuk: $\frac{1}{d(i)} \sum_{(i,j)\in H} x_j = x_i$ és $\frac{1}{d(i)} \sum_{(i,j)\in H} y_j = y_i$, ahol $d(i)$ az i-edik pont foka. Azaz minden szabad pont a szomszédainak súlypontja.



Nézzük ezt az újabb példát! Az algoritmusunk *síkba rajzolta* a gráfot.

Síkba rajzolható gráf
Egy gráfot síkba rajzolhatónak nevezünk, ha le tudjuk úgy rajzolni, hogy semelyik két él ne messe egymást.



Vajon előfordulhat-e, hogy egy síkba rajzolható gráfból az algoritmus nem ilyen tulajdonságú gráfot kreál?

Ha egy háromszöget tekintünk, amelyben egy csúcsából egy út indul, akkor példánkat egyetlen háromszöggé rántja össze. Az ilyen esetek elkerülése végett feltesszük, hogy a gráf *háromszorosan összefüggő*.

Háromszorosan összefüggő gráf:
Olyan gráf, amely összefüggő marad, akármelyik két csúcsát „töröljük” is.

Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy egy gráf akkor és csak akkor rajzolható síkba, ha minden (legalább) háromszorosan összefüggő részgráfja is síkba rajzolható.

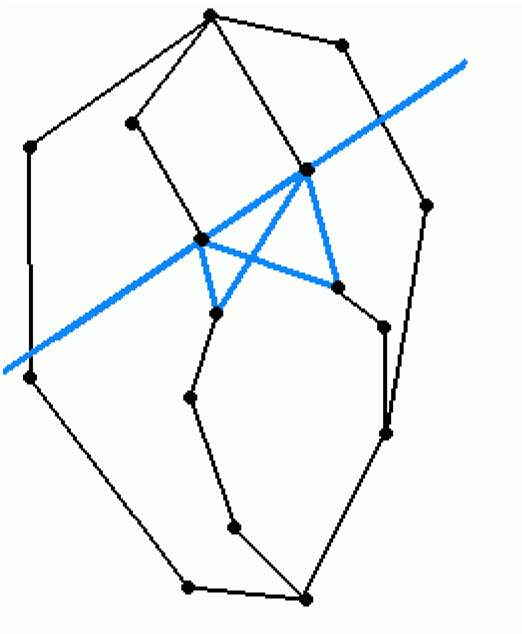
A rögzített pontokat is úgy kell kiválasztanunk, hogy ne legyen két, nem szomszédos pont közt él (szomszédosak közt viszont legyen), ekkor ugyanis előfordulhat, hogy rögzített élek metszik egymást, amikre az algoritmusnak semmi hatása nincsen.

Feladat:

Adjunk meg olyan algoritmust, amellyel kiválaszthatók a megfelelő rögzített pontok!

Lemma: nem lehetséges a szabad csúcsok rögzítetteken kívüli elhelyezkedése
Indirekt bizonyítás: az ilyen elrendeződés szabad pontokat jelentene a konvex burokban. Konvex szög alatt helyezkedne el minden belőle kiinduló él, így nem lehetne szomszédos csúcsainak súlypontjában.

Megjegyezzük, hogy fizikailag az élek egy irányba húzó erőket jelentenének az egyik komponens szerint.
Bebizonyítjuk, hogy ezek a feltételek elégségesek is.
Ha a gráf síkba rajzolható, akkor feltehetjük, hogy háromszögekből áll (ugyanis fel tudjuk bontani háromszögekre). Legyen ennek a síkba rajzolt változata az 1. állapot, a 2. állapot pedig ennek az algoritmussal átalakított képe!
Problémát jelent, ha első állapotbeli szomszédos háromszögek – amelyek a másik ábrán is háromszögek – a második állapotban „egymásra hajlanak".

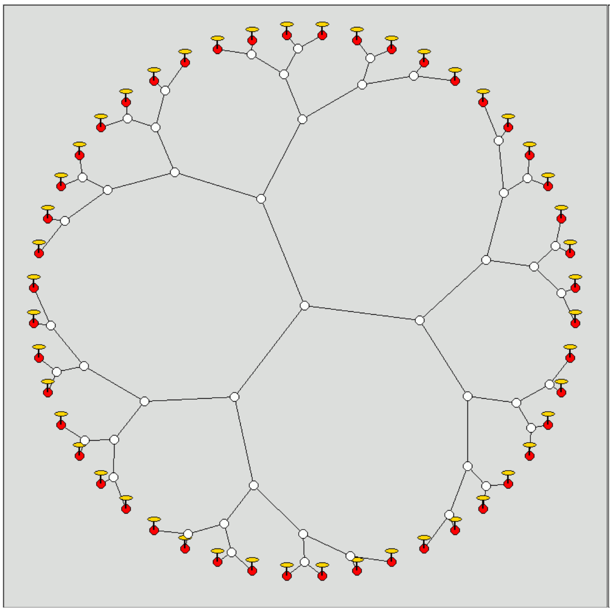


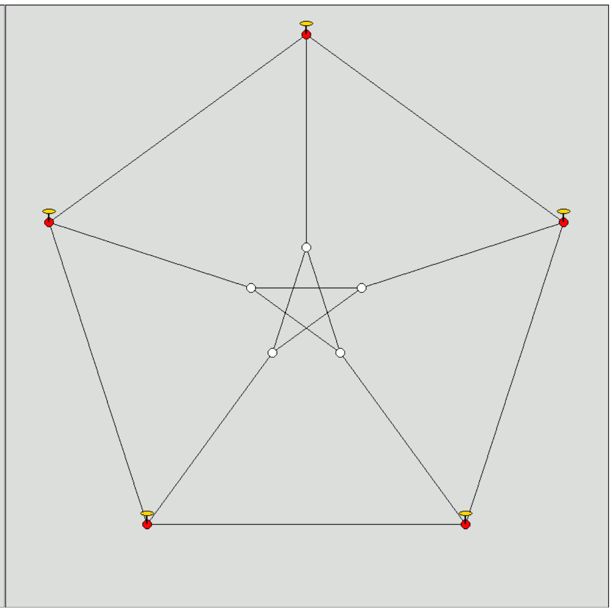
Vegyük a közös oldalegyenest, és jelöljük a közös él végpontjait A-val ill. B-vel, a megmaradt két csúcsukat pedig C-vel ill. D-vel!
A C és D pontból lennie kell olyan élnek, ami távolodik a vizsgált AB egyenestől, ha nem rögzített pont (ld. lemma). Amíg el nem érjük a határt, mindig találhatunk az aktuális végpontból kiinduló, az egyenestől távolodó élt. A C-ből és D-ből induló utaknak lesz metszéspontja – a határon is összeköthetjük őket –, ezek közül az elsőt választjuk ki.
Az A és a B pontból hasonló módon, csak a másik irányba haladva ugyancsak kaphatunk egy metszéspontot. Csak a két háromszöget, a két-két utat (a metszéspontokig) és az egész gráf konvex burkát tekintve, a kapott gráf nem rajzolható síkba (itt szükség van a fent említett megfelelő pontrögzítésre). Ez viszont ellentmondás, mert a síkba rajzolt, első állapotnak ez részgráfja kellene, hogy legyen. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Feladat

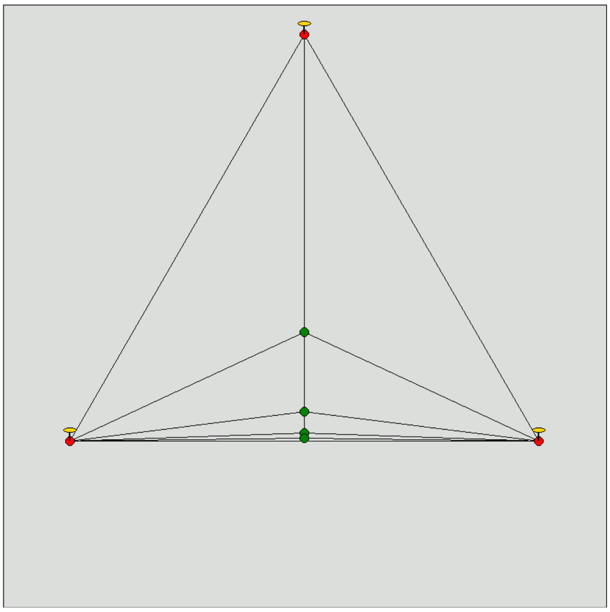
Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf tényleg nem rajzolható síkba!

Könnyen beláthatjuk, hogy egyrétűen fedik le a háromszögek a rögzített pontok sokszögét.





A lerajzolási módszer nem minden esetben használható jól, mert például a következő (néhány pontú) gráf középső tengelyén végighúzódó útjának szomszédos pontjai túl közel kerülnek egymáshoz:



Az út *n*. pontja az alaphoz tartozó magasság $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ -részénél közelebb van az alsó két rögzített csúcs egyeneséhez, ui. az (*n*-1). pont és az alsó rögzített csúcsok súlypontjától lejjebb *húzza* a hozzá éllel kapcsolódó (*n*+1). pont.

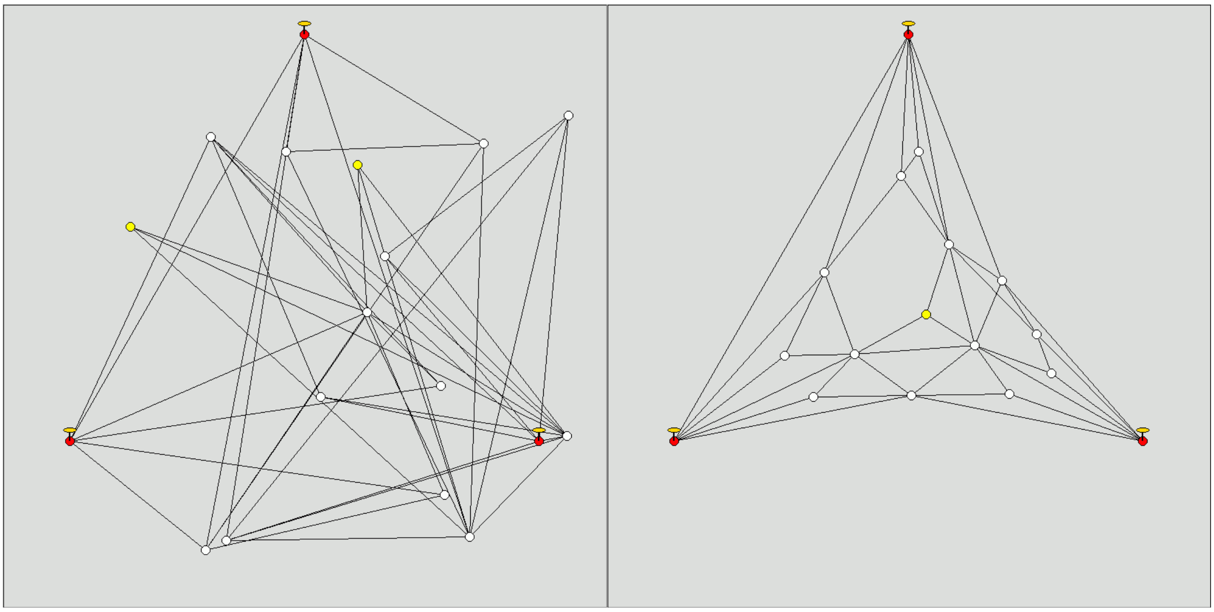
Tutte 1963-ban kifejlesztett módszerének más alkalmazásai is lehetnek:

„Elfajult” gráfok

Korábbi feltételeinket nem elégíti ki az alábbi három hálózat:

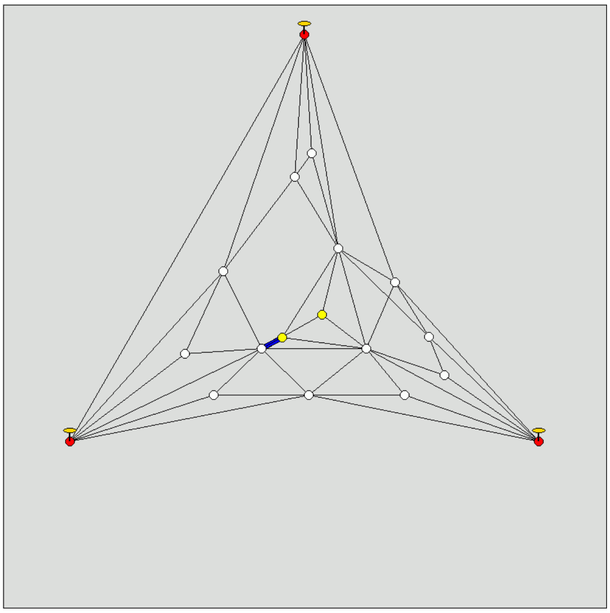
Egy nem síkba rajzolható gráf

Az előbbi gráfhoz hasonló esetet mutat a következő két ábra:

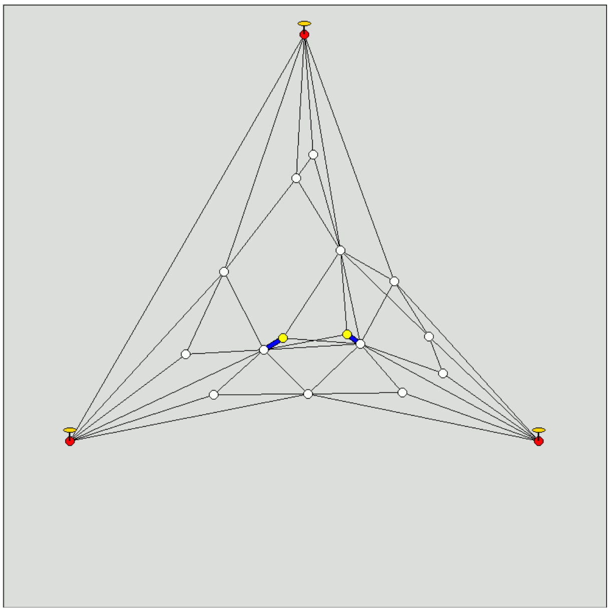


A nem síkba rajzolható hálózat két sárga pontja, láthatóan egy pontba *csúszott*. A két pontot ugyanahhoz a három ponthoz köti él, tehát ugyanannak a háromszögnek a súlypontjába rendezi el az algoritmus.

Az *elfajulást* megszüntethetjük, ha *megerősítünk* egy gumiszalagot, tehát egy együtthatót megváltoztatunk a háromszög egy csúcsa, és egy sárga pont közötti rugónk energiájában:

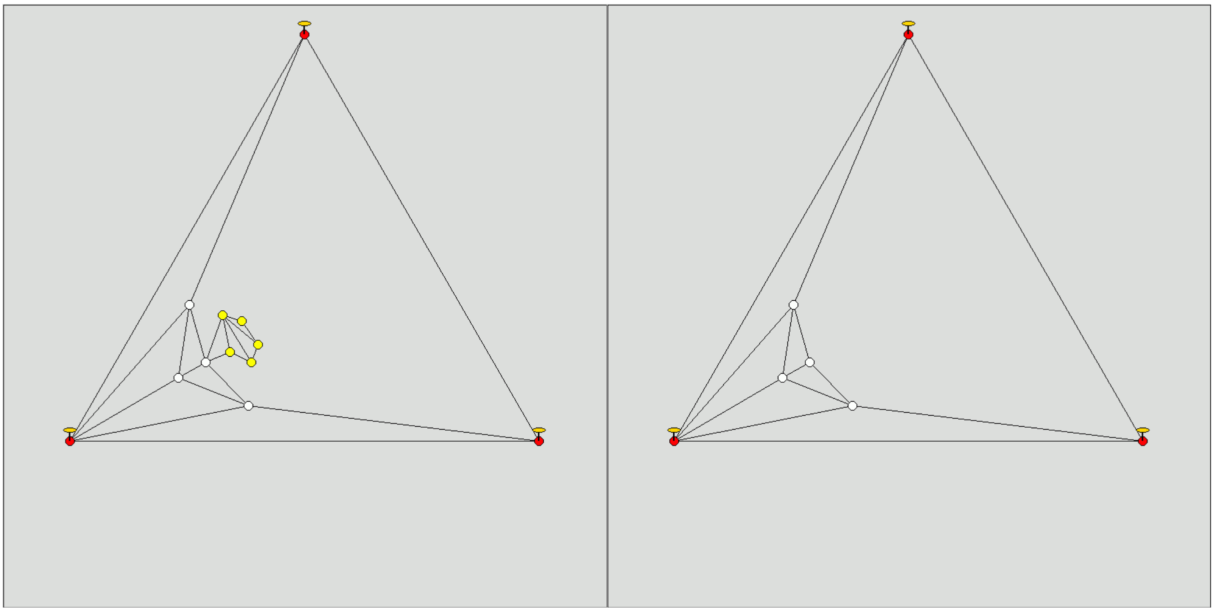


Látható, három pont egy egyenesen húzódik végig, egy, a másik sárga ponthoz tartozó erősebb szalag azonban megbonthatja a szimmetriát:



Egyszeres összefüggés

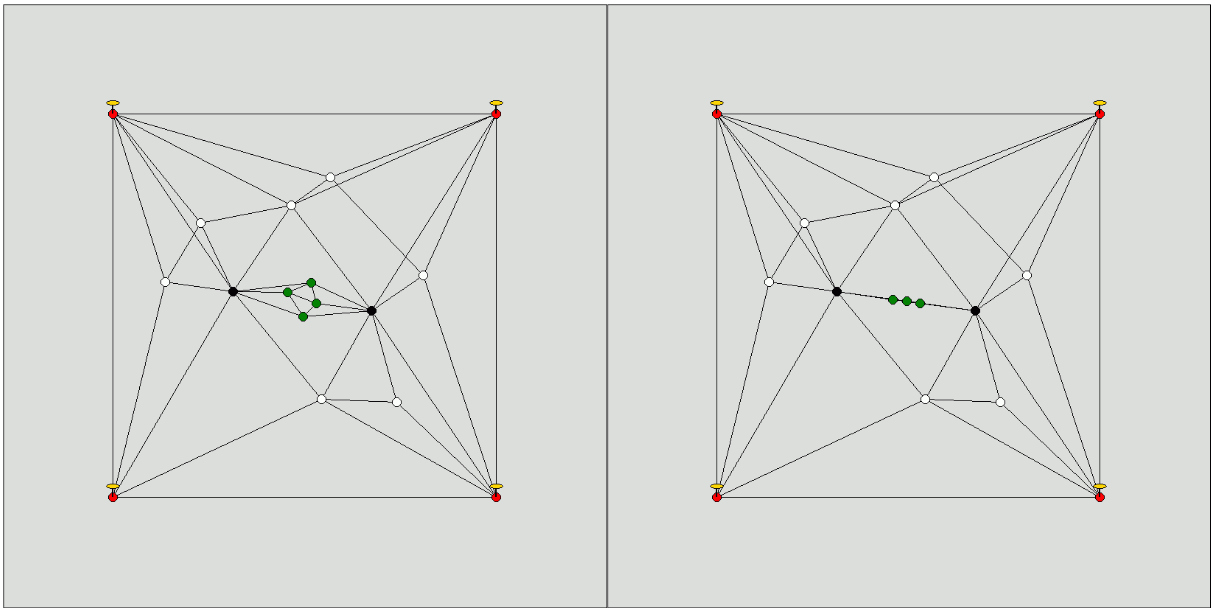
A gráf egyetlen pontjához kapcsolódva utat alkotó sárga pontok nem láthatók a második ábrán:



Az *elfajulás* nem szüntethető meg a gumik erejének változtatásával.

Kétszeres összefüggés

Tekintsük a következő ábrát, és figyeljük meg a zöld pontok helyzetét!



A két fekete csúcs elhagyásával a hálózat nem marad összefüggő, a négy zöld csúcsot el tudjuk a többitől „vágni”, tehát a gráf legfeljebb kétszeresen összefüggő. Az algoritmusunk egy egyenesre *húzta* a zöld csúcsokat.

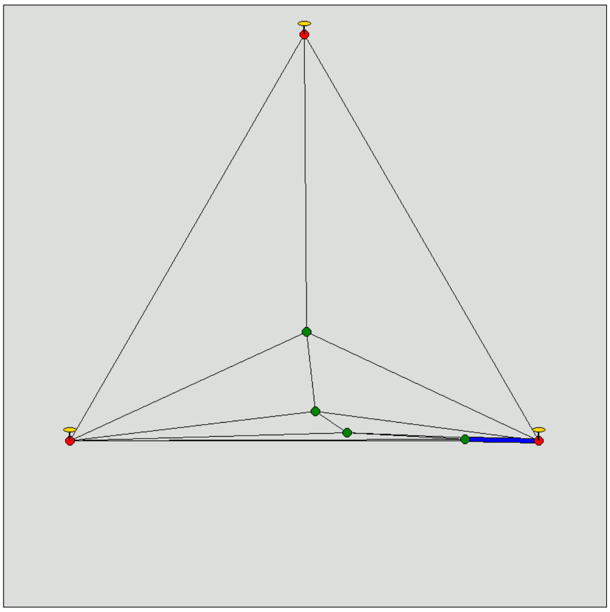
Bebizonyítjuk, hogy a gráf egy egyenesen elhelyezkedő (fekete és zöld) csúcsai a gumierősségek bármilyen megválasztása esetén egy egyenesen vannak.

Tegyük fel ui., hogy lesz olyan zöld pont, amelyik nem a fekete csúcsok által meghatározott szakaszon helyezkedik el!

Vegyünk a gráf egy ilyen tulajdonságú, változó gumiszalagokkal erősített rajzolását! Ha tekintjük az ábra konvex burkát: vagy tartalmaz zöld csúcsot; vagy a két fekete csúcsból áll, ami ellentmondana a feltételünknek. A konvex burok zöld csúcsa azonban a lemmánkban szereplő feltételeknek megfelel, tehát egy konvex szögön belül helyezkednek el a belőle kiinduló élek. A kapott helyzet tehát nem lehet minimális energetikailag, ami ellentmondás.

A *régi ismerős*

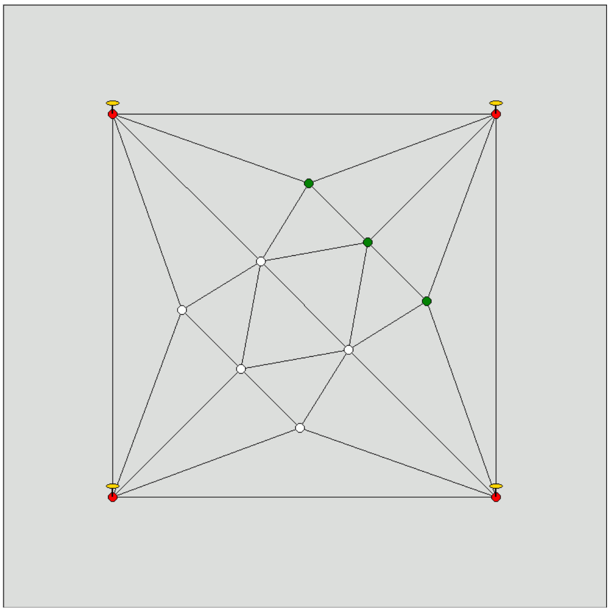
A tapasztalataink segítségével az előbbi ábránk szimmetriáját is megbonthatjuk egy erősebb rugóval:



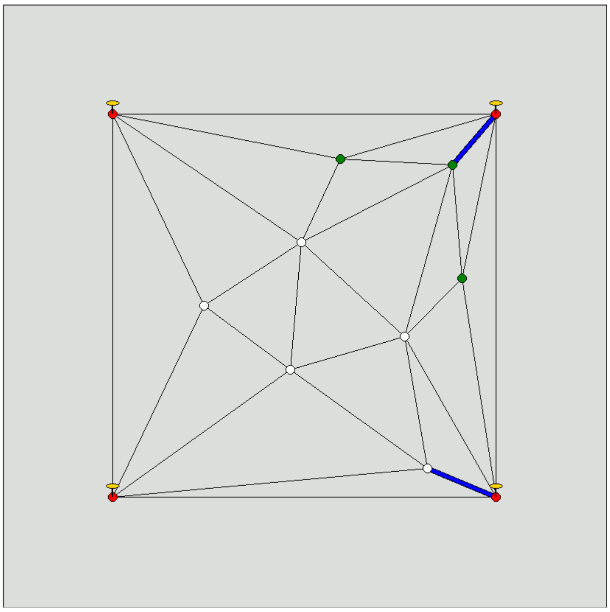
Három pont egy egyenesen

Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, az algoritmus kimeneteként kapott rajzon zölddel jelölt pontok egy egyenesen helyezkednek el!



Az előbbi feladatban bebizonyított kollinearitás megszűnik, ha a négyzet két átlójára szimmetrikus gráf két élének gumiját megváltoztatjuk:



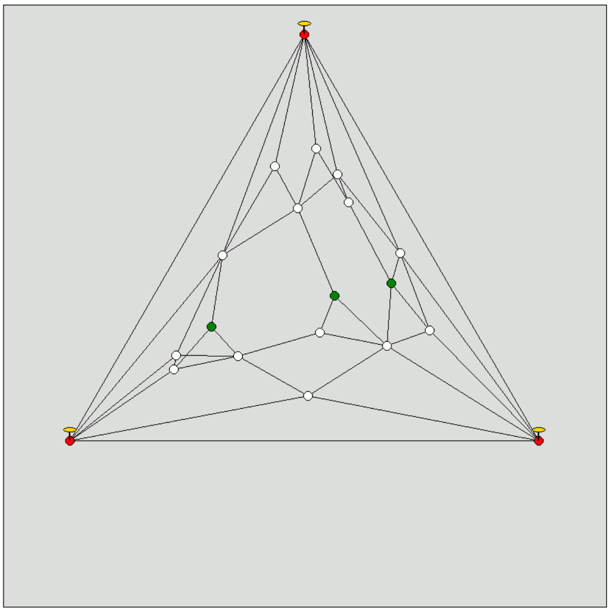
Feladat:

Eshet-e három pont egy egyenesre a kapott gráfon? Ha igen, melyik él(eke)t erősítenénk még meg?

Összefoglalva az ***elfajulás*** kétféle eredetű lehet: szimmetriai okokra visszavezethető vagy véletlen; és az alacsony összefüggőségből, más szóval strukturális okokból következő. Megfigyelhettük: az előbbi kizárható a gumiszalagok erejének módosításával, az utóbbi nem orvosolható eszközünkkel.

Lemma: Bármely három pontra megválaszthatók úgy a gumik erősségei, hogy a három csúcs ne essen egy egyenesre.
Bizonyításunkban felhasználjuk a Menger-tételt:

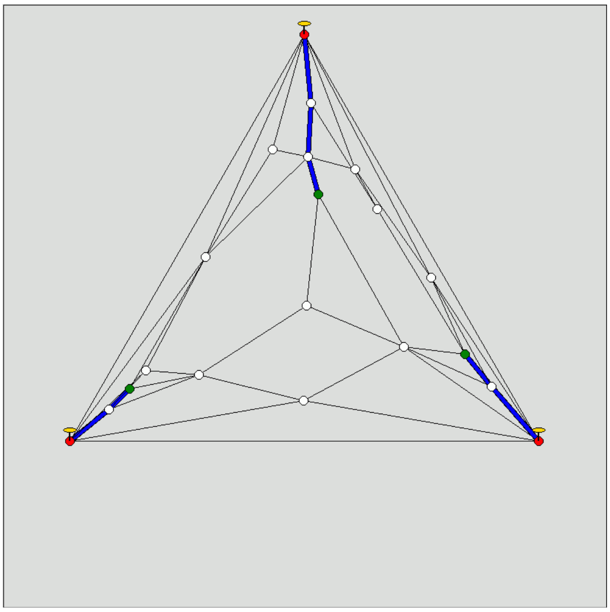
Menger-tétel
Ha egy háromszorosan összefüggő gráfból kiválasztunk két csúcshármast, akkor meg lehet adni három olyan utat, ami a ponthármasok között halad, és nincs közös pontja. Egy ilyet mutat a következő kép, ahol a ponthármasok zöldek és pirosak:



Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy az előző kép háromszögének zöld pontjai egy egyenesen helyezkednek el!

Vegyünk a rögzített pontok közül hármat, és legyen ennek a ponthármasnak piros, a vizsgálandó három csúcsnak zöld a neve! Ha a Mengel-tétel segítségével kiválasztható három út éleinek gumierősségét nagyon megnöveljük, akkor elérhető, hogy akármilyen közel kerüljenek a zöld csúcsok a hozzájuk kötött pirosakhoz. A piros pontok háromszöget alkotnak, tehát a zöldek sem lehetnek egy egyenesen. Ábránkon is látunk példát:



Igazoljuk, hogy háromszorosan összefüggő gráfok esetén megválaszthatók a gumiszalagok erősségei oly módon, hogy semelyik három csúcs ne essen egy egyenesre.
Adjunk az *i* és *j* pontokat összekötő gumiszalagoknak c_{ij} erősséget!
A rendszer energiáját esetünkben $\sum_{(i,j)\in H} c_{ij}((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)$ összefüggés írja le az eddigi jelölésekkel.

Az x_i és y_i változók szerint lederiválva a kifejezést: $\frac{1}{\sum c_{ij}} \sum_{(i,j)\in H} c_{ij} x_j = x_i$ és $\frac{1}{\sum_j c_{ij}} \sum_{(i,j)\in H} c_{ij} y_j = y_i$

összefüggéseket kapjuk a minimumhely koordinátáiként.
Három pont akkor esik egy egyenesre, ha a következő, a koordinátáikat tartalmazó determináns értéke 0: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Behelyettesítve az előzőekben kapott kifejezésekbe algebrai egyenleteket eredményez a c_{ij}-kre.
Bármely három pontra a kapott egyenlet nem lehet azonosság, mert lemmánkban beláttuk, hogy c_{ij}-k választhatók minden háromszorosan összefüggő ponthármasra úgy, hogy ne elégíthessék ki az egyenletet, ne essenek pontjaink azonos egyenesre.
A véges sok algebrai egyenlet, amelynek egyike sem azonosság, együtt sem fedi le a teljes megoldáshalmazt, lesz olyan c_{ij}, ami semelyiket sem teljesíti, tehát semelyik három pont nem lesz egy egyenesen.

Hogyan tudjuk hasznosítani tételünket?

Az állítás alkalmazásával tesztelni lehet, hogy a gráf háromszorosan összefüggő-e.
Válasszunk ki az ábrából minden lehetséges módon hat pontot! Lerögzítjük közülük bármely három pontot egy szabályos háromszögbe.
Ha a gráf háromszorosan összefüggő, (A minimum a gumierősségek egy adott választásánál egy egyenesen feszítheti ki a másik három pontot.) az előbbi bizonyításból következően a c_{ij}-értékeket véletlenszerűen érdemes megválasztani, mert 0 valószínűséggel esik az algoritmussal megkeresett minimumnál a másik három pont egy egyenesre. Ha nem választható ki a három-három csúcs között három különböző út, az előző bizonyítás egyenletében azonosság szerepel, a három csúcs egy egyenesen lesz. Elegendő tehát a kollinearitást ellenőriznünk. Elvégezhetjük a vizsgálatokat több ponttal is, ekkor magasabb dimenziós térben kell a tulajdonságot ellenőriznünk.
Az előbbi eljárást valós számokkal végeztük. Bizonyos esetekben azonban a számolások elvégzése problémát jelenthetne. Ha tekintjük ui. a *régi ismerős*t (lsd. „elfajult” gráfok), akkor a középső tengelyen végighúzódó út sokkal több pontból is állhat (pl. 100), és az alsó két csúcs

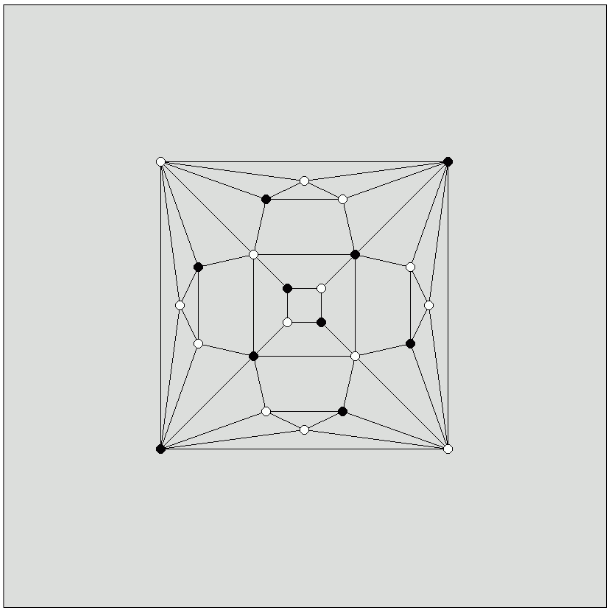
egyeneséhez olyan közel kerülhet (példánkban a magasság $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ -részénél is közelebb), ami számításaink hibahatárán belül helyezkedik el jelentősen.
Egyszerű megoldás lehet problémáinkra, ha a számításokat modulo p végezzük, ahol p egy prímszám. Bizonyításunk ui. csak algebrai lépéseket használ, amelyek elmondhatók bármilyen testben. Elegendő tehát algoritmusunkat modulo p futtatni.
A megvalósíthatóság függ a prím nagyságától:

Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy n csúcsszámú gráf esetén n^3 nagyságrendű prímet kell keresnünk!

Maximális vágás-probléma

A gráfelmélet egyik fontos kérdését tárgyaljuk a következőkben. A hálózatok pontjait két olyan osztályba szeretnénk sorolni, ahol a két csoport közötti élek száma maximális. Pl. a páros gráfok esetében a keresett elosztás minden csúcsot tartalmaz. Bizonyos értelemben tehát az ilyen tulajdonságú ábrákat szeretnénk megközelíteni.
Tekintsük az alábbi gráfot!



A képen feketével jelöltük a csoport egyik, fehérrel a másik csoport pontjait.
A probléma megvalósítása n pontú gráfra 2^n lépésben triviális. NP–teljes, tehát a nyilvánvaló lehetőségnél jelentékenyen rövidebb idejű megoldása valószínűtlennek tűnik.
A pontos optimum megállapításának nehézségei a közelítő meghatározást előnyösebbé teszik.

Erdős Pál eredménye

Az 1960-as években Erdős megadott egy eljárást, ami legalább az optimum felét eredményezi. Az algoritmus sorra veszi a pontokat, és elhelyezi a csoportok egyikében. Megvizsgálja, hogy az új pontot az eddigiek közül melyik csoporttal köti össze több él, és a másikba rakja. Látható, hogy mindig legalább az élek felét a két osztály közé rakhatjuk, az optimum természetesen legfeljebb az összes él, összességében tehát legalább 50 %-ot eredményez.
Természetesen a módszer bizonyítja, hogy mindig legalább az élek felét tartalmazza a legjobb vágás.

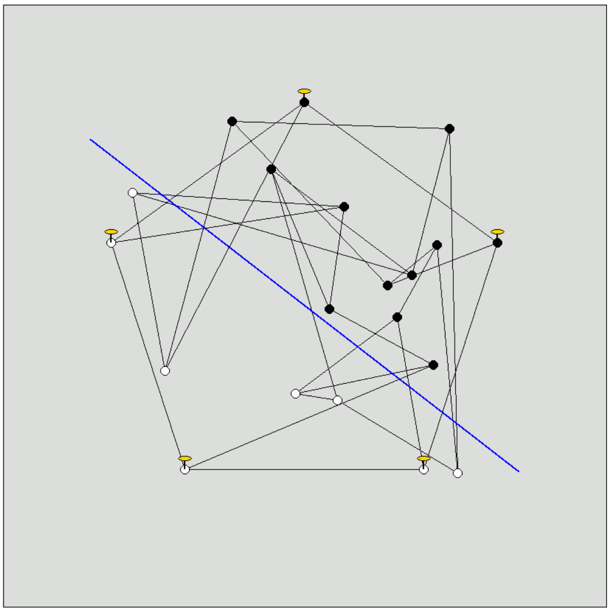
Hastaad bizonyítása

Bármilyen egyszerű is Erdős eljárása, sokáig mindössze a legjobb vágás polinomiális idejű megkeresésének valószínűtlenségét sikerült igazolni, jobb algoritmust nem találtak.
Hastaad, svéd matematikus a ’90-es évek közepén belátta, hogy ha létezik az optimum 94 %-át megadó, gyors módszer, az optimum is elérhető hasonlóan polinomiális időben.

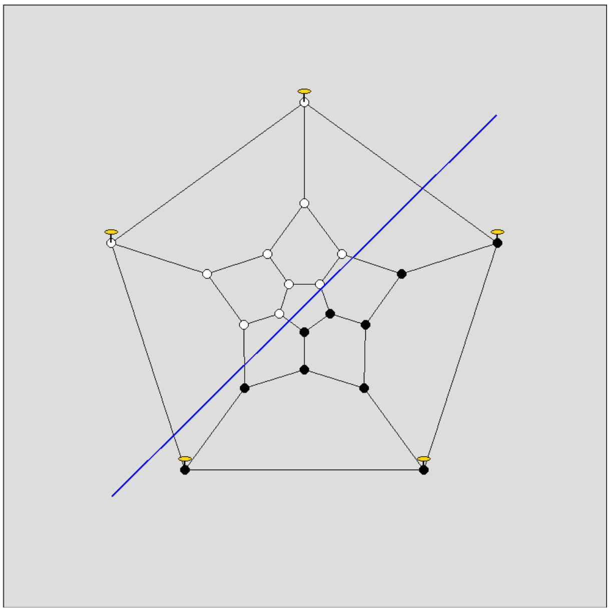
Gommance és Williamson algoritmusa

Haastad tétele után nem sokkal Gommance és Williamson, két amerikai matematikus eljárása az ideális vágás 87 %-át érte el.

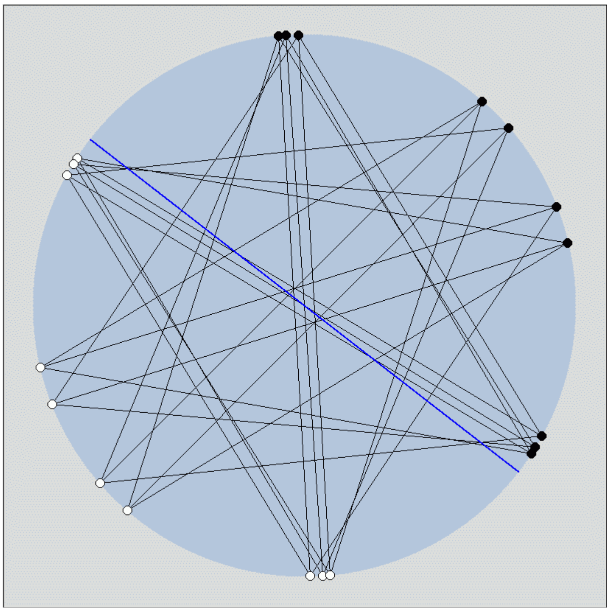
A módszert a gumiszalagokkal magyarázzuk meg.
Ha véletlenszerűen, 1/2-1/2 valószínűséggel színezzük a pontokat feketére és fehérre, várhatóan az élek fele húzódik különböző színű pontok között.
Az élhez tartozó két csúcs ui. ½ valószínűséggel azonos, és ugyanennyi eséllyel különböző színű lesz.
Vizsgáljuk meg a dodekaéder hálózatának alábbi, véletlenszerűen elhelyezett csúcsú ábráját, és a rajta véletlen irányba húzott egyenest!



Az egyenes az előbbihez hasonló módon várhatóan az élek felét vágja át.
Ha azonban a gumiszalagok összehúzódnak, látjuk, hogy az egyenes kevesebb élt keresztez:



A rugók ui. megrövidültek, kisebb valószínűséggel metszi az egyenes az egyes szalagokat.
Megjegyezzük, hogy kevés él átvágására kiváló lenne a módszerünk.
Természetes lehetőséget nyújt, ha nem a minimális energiájú helyet, hanem az energia maximumát keressük meg, az egyes pontokat távolítjuk. A keresett maximális értéket a rendszer a le nem rögzített pontok végtelenbe tolódásánál veszi fel, ezért egy körben korlátozzuk a csúcsokat. A szabad csúcsok a képen láthatóan a körön sorakoznak:

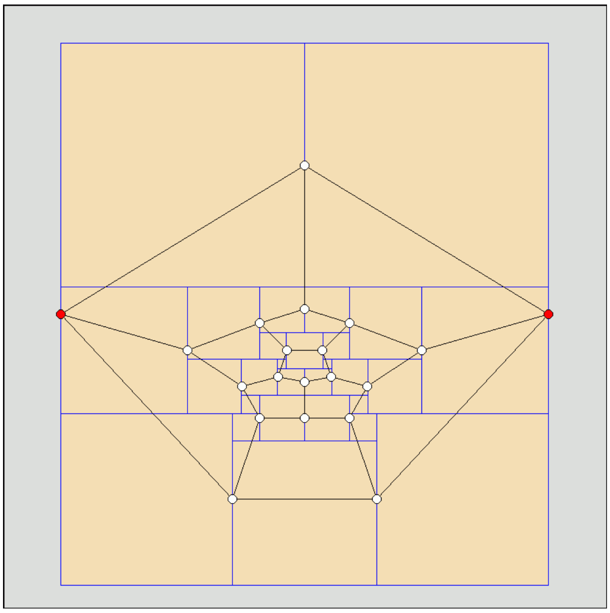


A véletlen egyenessel rendkívül jó eredményt érhetünk el: akár a maximális átvágott élszámot is. Maximális vágásnál egyszerű dolgunk van a páros gráfokkal: ezek pontjai ugyanis helyből két csoportba vannak osztva, ahol csak a csoportok közt fut él.

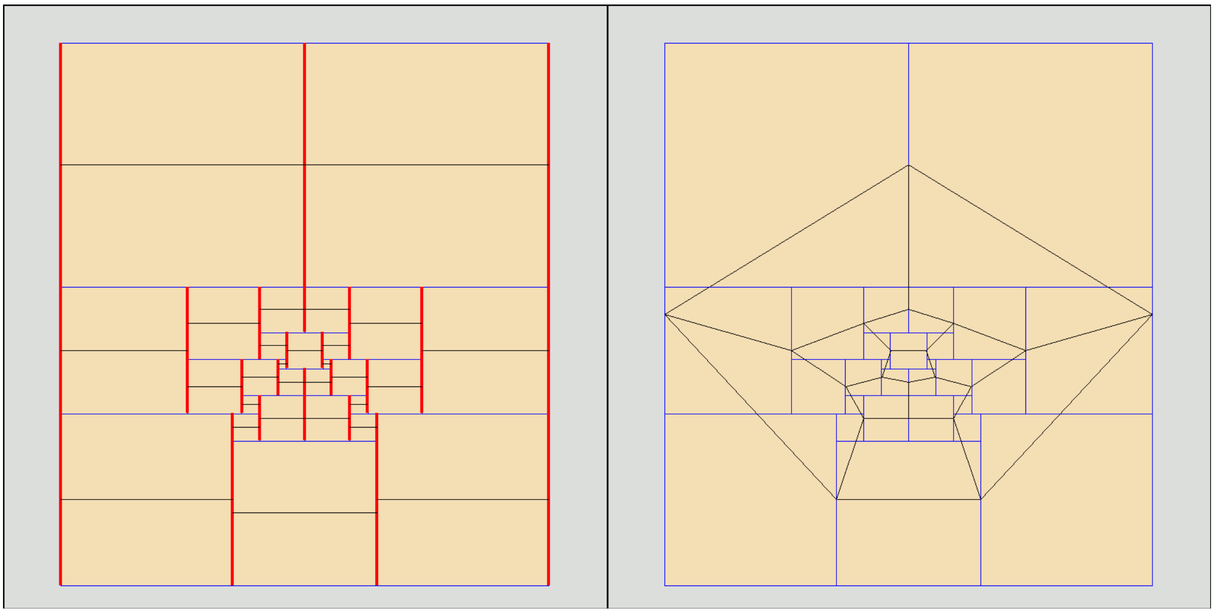
Az algoritmusunkkal azonban problémák merülnek fel: Egyrészt kétséges, hogy mennyire hatásosan maximalizáljuk az energiát a körbe szorítva. Másrészt pedig ennek a maximumnak megtalálása viszonylag lassú művelet. Ezen gondokra megoldást nyújthat, ha kilépünk a két dimenzióból: n dimenziós térben eresszük el az egymást taszító pontokat (ahol n a pontok száma). Itt már gyorsan számolható a maximum.

Téglalap kitöltése kisebb négyzetekkel

A gumiszalagoknak egy további alkalmazása is lehetséges: az összehúzó algoritmus tulajdonságai, és megfelelő gráf felhasználásával egy téglalapot több kisebb négyzetre bonthatunk:

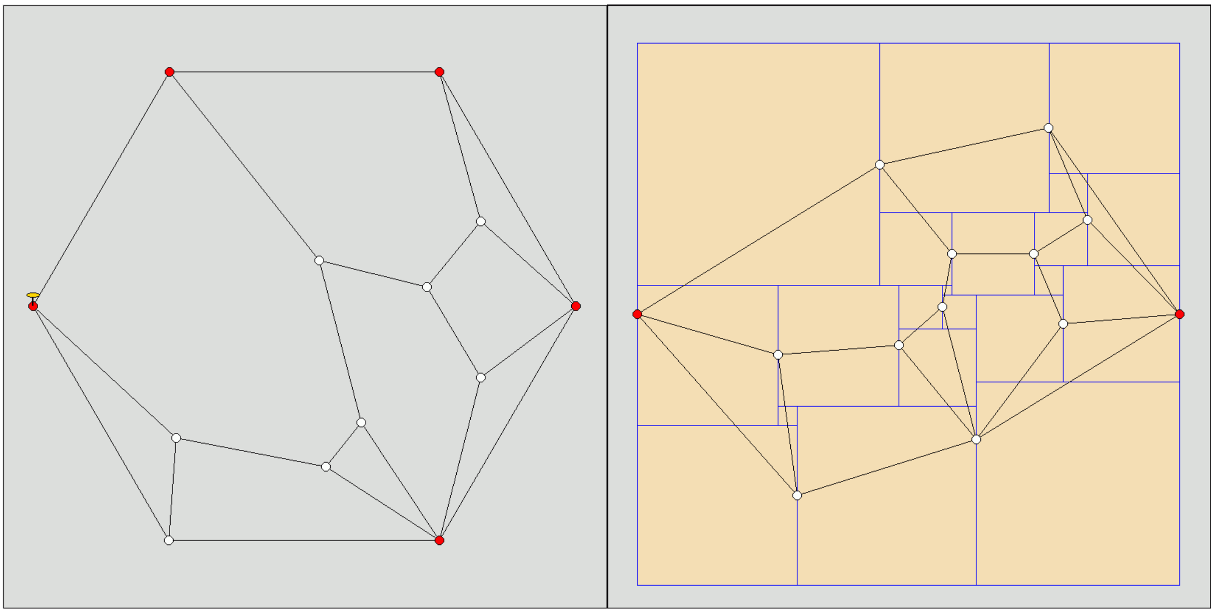


Látható, hogy a gráfnak most csak két rögzített pontja van. Induljunk el balról, s vizsgáljuk a rögzített pontból kiinduló éleket! Mindegyikhez rajzolunk egy, az él vízszintes vetületével megegyező oldalú négyzetet, amely vízszintes középvonalának jobb oldali végpontjában van az él másik végpontja. Most nézzük az egyik (mondjuk középső) él-végpontot, s vizsgáljuk az abból jobbra induló éleket! Ezek mindegyikéhez rajzolhatunk megfelelő négyzetet, az él vízszintes vetülete oldalhosszúságút, a bal szomszéd négyzet lapjára illeszkedőt. Ezek az új négyzetek pontosan elfoglalják a bal szomszéd négyzet lapját, hiszen a pont a súlypont, így a belőle balra illetve jobbra kimenő élek vetületének összhossza egyenlő. Hasonló módon belátható, hogy a megfelelő négyzeteknek az új jobb oldali végpontok is egy oldaluk felezőpontjában lesznek. Végighaladva az összes élen, végül egy téglalapot adnak a kis négyzetek.



Az algoritmust meg is fordíthatjuk, ha veszünk egy négyzetekre feldarabolt téglalapot. Ehhez először is húzzuk meg a függőleges éleket, valamint a négyzetek vízszintes középvonalait, majd minden ilyen szakaszt húzzunk össze egy pontba (a felezőpontba)! Ily módon megkapjuk a gráf pontjait, a középvonalakból pedig az éleket. Meggondolható, hogy a módszerrel a síkgráfok és a négyzetekre felbontott téglalapok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak.

A metódust R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone és W. T. Tutte 1940-ben, a híres „négyzet felbontása különböző kis négyzetekre” probléma kutatása közben dolgozta ki. Meg is találták azt a gráfot, amire az algoritmust alkalmazva a kívánt felbontás áll elő:



A felbontás egyúttal a legkevesebb négyzetszámra is példát ad.