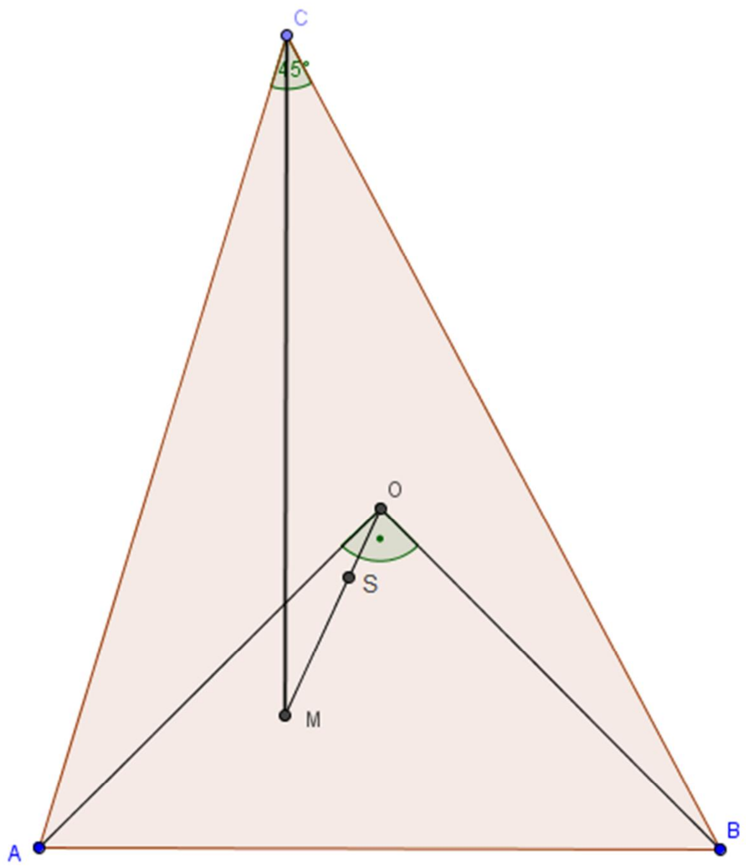
Feladat:
Az ABC hegyesszögű háromszög C-nél levő szöge 45°. M a háromszög magasságpontja.
Bizonyítsuk be, hogy $CM = AB$.

A feladathoz a Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc 3 kiváló diákja újabb 4 megoldást adott!

Gáspár Attila
komplex számos megoldása
(tanárai: Győry Ákos, Kovács Attiláné, Marosszéky Gábor)

Helyezzük el a háromszöget a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy a háromszög köré írt kör középpontja (O) az origó legyen.



A kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB\sphericalangle = 90°$, és $AO = BO$ ezért $b = ai$.

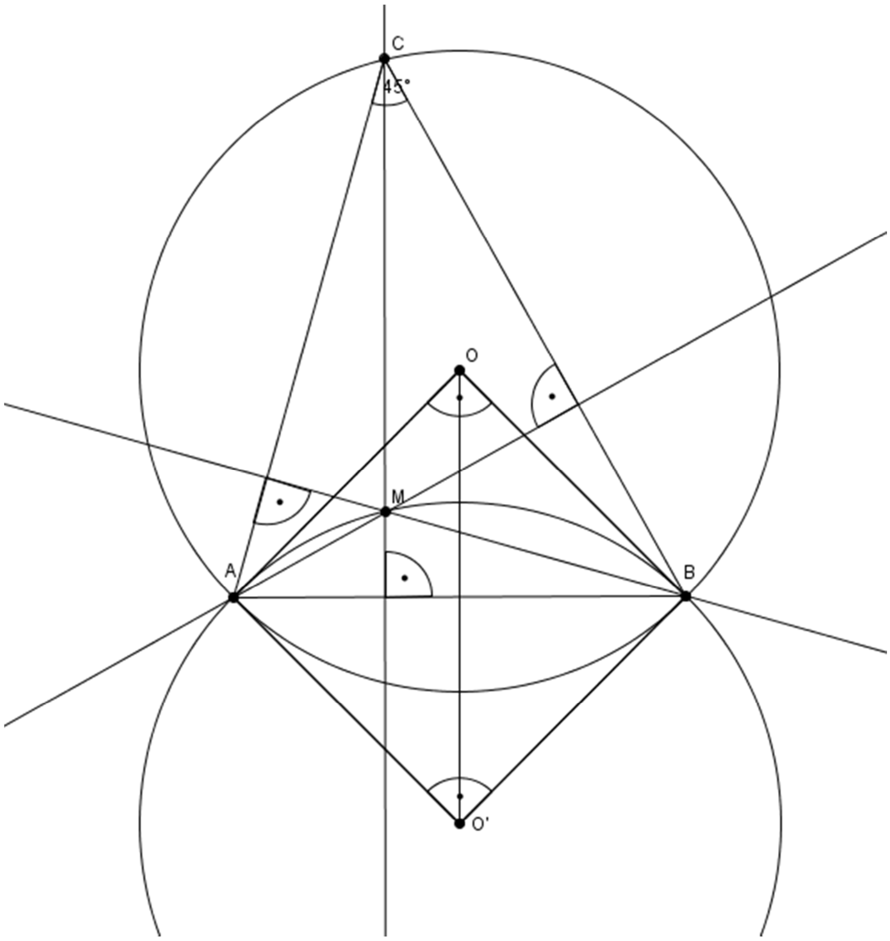
Ekkor $AB = |a - b| = |a(1 - i)| = \sqrt{2}|a|$.

Ismert, hogy $m = a + b + c$, így $MC = |m - c| = |a + b| = |a(1 + i)| = \sqrt{2}|a|$,

ami azt jelenti, hogy $AB = MC$.

Gáspár Attila
megoldása
(tanárai: Győry Ákos, Kovács Attiláné, Marosszéky Gábor)

Legyenek a csúcsok A, B és C, a magasságpont M, és a körülírt kör középpontja O!



Ha M-et tükrözzük AB-re, akkor a képe a körülírt körön lesz. Így ha a körülírt kört tükrözzük AB-re, akkor áthalad M-en.

Legyen O képe O'!

A kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB\angle = 2 \cdot 45° = 90°$. $AO = BO$, ezért az ABO háromszög egyenlő szárú derékszögű.

A tükrözés miatt az ABO' is egyenlő szárú derékszögű, ezért az $AO'BO$ négyzet.

Az átlók egyenlők, ezért $AB = OO'$. $CM \perp AB \perp OO'$, ezért $CM \parallel OO'$.

A két kör sugara egyenlő, ezért az O középpontú kört $\overrightarrow{OO'}$-vel eltolva az O' középpontút kapjuk.

Így a C-t $\overrightarrow{OO'}$-vel eltolva M-et kapjuk.

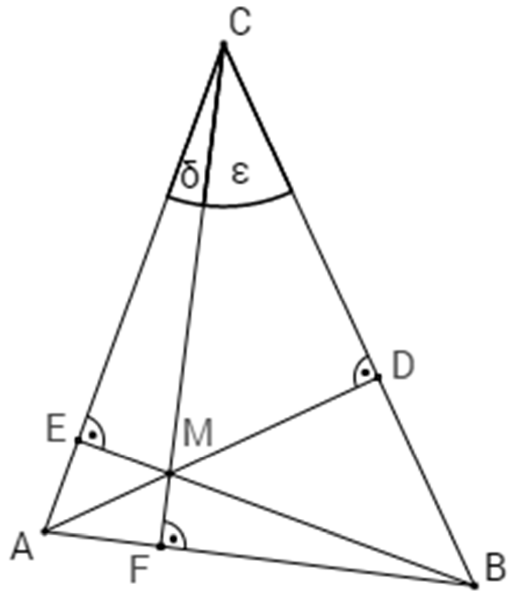
Ekkor $CM = OO' = AB$.

Porupsánszki István
megoldása
(tanárai: Kovács Attiláné, Vass Iván, Győry Ákos, Marosszéky Gábor)

A háromszög magasságainak talppontjai legyenek rendre D, E és F, az oldalainak hossza pedig szokásos módon a, b és c. A C-nél levő szöget a hozzá tartozó magasság két részre oszt, ezek legyenek δ és ε (l. ábra)

A BCE és a CAD háromszögek egyenlőszárú derékszögű háromszögek, így

$EC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ és $CD = \frac{b}{\sqrt{2}}$.



Az MCE háromszögben: $\cos\delta = \frac{EC}{MC} = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot MC}$.

Az AFC háromszögben: $\sin\delta = \frac{AF}{AC} = \frac{AF}{b}$.

A CDM háromszögben: $\cos\epsilon = \frac{CD}{CM} = \frac{b}{\sqrt{2}\cdot MC}$.

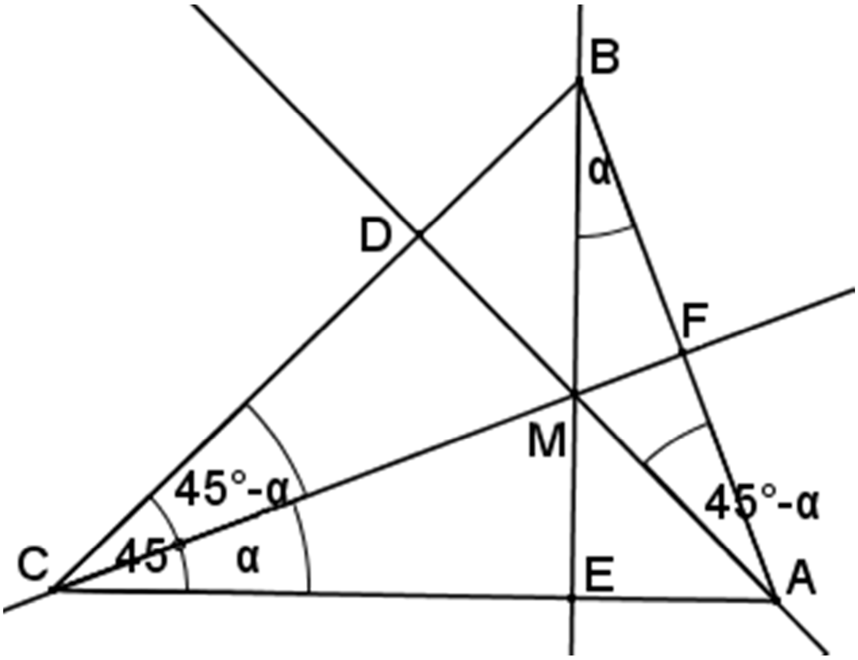
A CFB háromszögben: $\sin\epsilon = \frac{BF}{BC} = \frac{BF}{a}$.

Ezen összefüggések segítségével kapjuk, hogy

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\delta + \epsilon) = \sin\delta\cdot\cos\epsilon + \sin\epsilon\cdot\cos\delta = \frac{AF\cdot b}{\sqrt{2}\cdot MC\cdot b} + \frac{BF\cdot a}{\sqrt{2}\cdot MC\cdot a}$$
$$= \frac{AF + BF}{\sqrt{2}\cdot CM} = \frac{AB}{\sqrt{2}\cdot CM},$$

azaz $\frac{AB}{CM} = 1$, s így valóban $AB = CM$.

Szabó Dániel
megoldása
(tanárai: Dr. Szabadfalviné Kormányos Anikó, Gulyás Tibor, Győry Ákos, Marosszéky Gábor)



Használjuk az ábra jelöléseit, azaz a (rendre az A, B, C csúcsokhoz tartozó) magasságok talppontjai legyenek D, E, F; az ECM szöget pedig jelöljük α-val.

Az FCB szög nagysága $45° - \alpha$, hiszen az ACB szög 45°-os a feltétel értelmében. Továbbá az FBM és az ECM szögek merőleges szárú hegyesszögek, amiből az adódik, hogy $FBM\sphericalangle = ECM\sphericalangle = \alpha$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $FAM\sphericalangle = 45° - \alpha$.

Először AB-t fejezzük ki a CAF és a CBF háromszögekben felírt tangensek segítségével:

$$AB = AF + BF = CF \cdot tg\alpha + CF \cdot tg(45° - \alpha) = CF\big(tg\alpha + tg(45° - \alpha)\big) \qquad (1)$$

Majd CM-et, amihez a BFM és a CBF háromszögekben felírt tangenseket fogjuk használni:

$$CM = CF - MF = CF - BF \cdot tg\alpha = CF\left(1 - \frac{BF}{CF} \cdot tg\alpha\right) = CF(1 - tg(45° - \alpha) \cdot tg\alpha) \quad (2)$$

$tg\alpha$-ra és $tg(45° - \alpha)$-ra írjuk fel a két szög összegének tangensére vonatkozó addíciós képletet:

$$1 = tg45° = tg(\alpha + (45° - \alpha)) = \frac{tg\alpha + tg(45° - \alpha)}{1 - tg\alpha \cdot tg(45° - \alpha)}$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy:

$$tg\alpha + tg(45° - \alpha) = 1 - tg\alpha \cdot tg(45° - \alpha).$$

Mindkét oldalt beszorozva CF-fel, és figyelembe véve (1) és (2) eredményét, a bizonyítandó $AB = CM$ összefüggést kapjuk.