# SORMINTÁK, frízek

## Készült a Közoktatási Modernizációs Közalapítvány támogatásával

Korábbi cikkünkben (Rózsaablakok és társaik [2]) az eltolás nélküli diszkrét egybevágósági transzformációk csoportjaival találkozhattunk.

E cikkünkben az egyetlen eltolást tartalmazó diszkrét egybevágóságokkal, ezek csoportjaival, a **frízcsoportokkal** foglalkozunk. Ennek során belátjuk, hogy pontosan hétféleképpen lehet olyan (végtelen) sormintákat, azaz frízeket alkotni, amelyek egy motívum (végtelen sok) ismétlésével állnak elő.
A szakirodalomban e hét frízcsoport jelölésére egy négy karakterből álló betű-, illetve számsorozat szolgál, amelyben az első helyen mindig a ***p*** áll. A második jegy ***m*** vagy ***1*** aszerint, hogy a csoportban van –e $\vec{T}$ eltolásra merőleges tengelyű tükrözés, vagy sem. A harmadik karakter is ugyanígy ***m*** vagy ***1***, avagy ***a*** annak megfelelően, hogy a csoport tartalmazza a $\vec{T}$ eltolással párhuzamos tengelyre tükrözést, vagy sem, illetve csúszástükrözést. ( A betű-, illetve számsor első betűje a ***p*** az angol ***pattern*** a.m.:minta, mintázat szóból ered.)

Az egyetlen $\vec{T}$ eltolás generálta, azaz az eltolás egészszámú többszöröseiből származó

***p111*** jelű csoport elemeit a $\left\{\overrightarrow{T^i}\right\}$

tartalmazza, ahol $i \in Z$ és $\overrightarrow{T^i}$ a $\vec{T}$ -nek ***i***-szeresét jelöli.
A csoport egy reprezentánsa az egyetlen ***L***-ből eltolással nyert

***…LLL…***

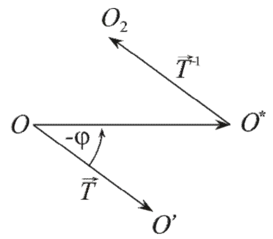
sorozat.

1. ***Tétel:*** Ha egy frízcsoport tartalmaz pont körüli (valódi) forgatást, akkor az csak a centrális tükrözés (félfordulat) lehet.

***Bizonyítás:*** Az *O* pont körüli $j \ (\neq 2pn, n \in \mathrm{N})$-szögű elforgatás a ponthalmazt önmagába viszi, tehát a $\vec{T}$ eltolás $j$ -szögű $\overrightarrow{T^*}$ elforgatottja az *O* pont körül elforgatottat (vagyis az eredeti alakzatot) önmagába viszi.
Mivel a frízcsoportba csak egyetlen eltolás lehetséges, így a $\overrightarrow{T^*}$ csak a $\vec{T}$ -vel ellentett $-\vec{T}$ eltolás lehet, azaz $j = p$ .
Állításunkat másképpen is igazolhatjuk: Ha a $\vec{T}$ eltolás mellett az $F(O; j)$ *O* pont körüli, $j$ -szögű forgatás is eleme a frízcsoportnak, úgy a

$\vec{T}^{-1} F^{-1} \vec{T} F$ is eleme a csoportnak.

Ez az elem-eltolás, mert $j + (-j) = 0$, amint azt a Sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések [1.] című cikk 10. tételéből tudjuk.
Vizsgáljuk meg, hogy a fenti csoportelem mibe viszi az *O* (forgásközép) pontot.
Mivel $F(O) = O$, $\vec{T}\,F\,(O) = O'$ (1. ára), $F^{-1}\left(\vec{T}F\,(O)\right) = F^{-1}(O') = O^*$ és $\vec{T}^{\,-1}(O^*) = O_2$. Az $\overrightarrow{OO_2}$ eltolás a frízcsoport egyetlen eltolása kell legyen, ezért
$OO_2 \parallel OO'$, vagyis $j = 0$ vagy $j = p$.

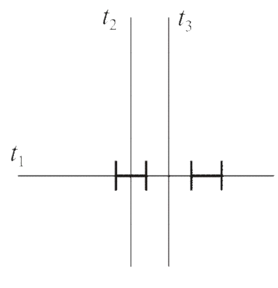



*1.ábra*

2. ***Tétel:*** A $\vec{T}$ eltolás forgáscentrumot forgáscentrumba visz. Ugyanis a $\vec{T}$ eltolás alakzatunkat önmagába viszi és az alakzat szimmetriaközepét az eltolt alakzat szimmetriaközepébe, vagyis az eredeti alakzat szimmetriaközepébe viszi.

3. ***Tétel:*** A félfordulatok közepe csak a $\vec{T}^{\,k}$ adta $O_k$, vagy az ezek szakaszait felező pont lehet.

***Bizonyítás:*** Ha a $\vec{T}$ az *O* szimmetriacentrumot $O_1$ –be, $\vec{T}^{\,k}$ az *O*-t $O_k$-ba $(k \in Z)$ viszi, úgy ezek mindegyike szimmetriacentrum. Az ezeket önmagukba vivő félfordulatok közepe azonban csak egy $(O;O_k)$ szakasz felezőpontja lehet, ami vagy egy $O_j$ centrum, vagy egy $O_jO_{j+1}$ szakasz felező pontja, a $K_j$ (2. ábra).




*2.ábra*

Az alapeltoláson kívül a csak félfordulatot (középpontos tükrözést) tartalmazó

***p112*** jelű frízcsoport elemeit a $\left\{\vec{T}^{\,i};O\vec{T}^{\,i}\right\}$

szolgáltatja, ahol $O$ az $O$ középű félfordulat. (Az [**1.**] 7., 8. és 10. TÉTELéből következik, hogy a felsorolt elemek (egybevágóságok) szorzata is eltolás, vagy pontra tükrözés.)

A csoportot jól képviseli az egyetlen *N*-ből képzett (két félfordulatal generálható) sorozat:

***…N N N…***

4. ***Tétel:*** Ha a frízcsoportban tengelyes tükrözés is van (az egyetlen $\vec{T}$ alapeltoláson kívül), akkor az csak a $\vec{T}$-re merőleges vagy a $\vec{T}$-vel párhuzamos tengelyre tükrözés lehet.

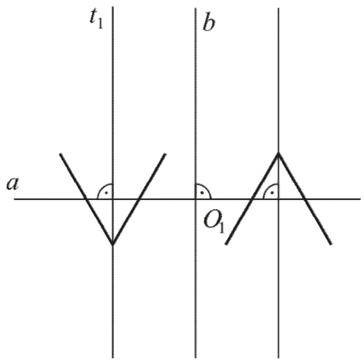
***Bizonyítás:*** Az eltolás, illetve a tengelyszimmetria miatt, a $\vec{T}$ alapeltolás tengelyes tükörképe a $\vec{T}^*$ is olyan eltolás, amely a ponthalmazt önmagába viszi. Ám frízcsoportunkban csak a $\vec{T}$ alapeltolás (illetve egész többszöröse) létezik, így $\vec{T}^*$ egyállású kell legyen a $\vec{T}$-vel, ami akkor és csak akkor teljesül, ha a tengely merőleges a $\vec{T}$-re, vagy párhuzamos a $\vec{T}$-vel.
A két tengelynek pontosan egyikét tartalmazó frízcsoportok a

***p1m1,*** a ***p1a1***, illetve a ***pm11***

jelűek, amelyeket a

…**DDD**…, a …**bpbpbp**…, illetve az …**AAA**…

betűsorozatok képviselik. Halmazelemeiket pedig rendre egy eltolás, egy (vízszintesre) tükrözés; egy csúszástükrözés, aminek kétszeri egymást követő alkalmazása adja az alapeltolást, illetve két (függőlegesre) tükrözés generálja.
A két szomszédos függőleges ($\vec{T}$-re merőleges) tengelyre tükrözés szorzata csakis a $\vec{T}$ lehet a frízcsoportbeliség és a [1.] 3. TÉTELe miatt, így ezek egymástól a $\vec{T}$ hosszának a felére vannak.




*3.ábra*

Ha a frízcsoportban mindkét tükrözés jelen van, úgy a ***pmm2*** három tükrözéssel, illetve a ***pma2*** jelű egy tükrözéssel és egy fél fordulattal (3. ábra) generált, a

…**HHH**… illetve a …**V Λ V**…

jelcsoport képviselte frízek adódnak. (Az utóbbiban az eltolást a két szomszédos centrumra tükrözés szorzata adja, míg eme eltolás felének és a vele párhuzamos tengelyre tükrözésnek az egymásutánja egy csúszástükrözést. Ugyanitt a két egymásra merőleges ***a,b*** tengelyre tükrözés szorzata adja a félfordulatot.

A már többször idézett [1.] tételeiből azonnal következik, hogy a felsorolt struktúrák *(p1m1, p1a1, pm11, pmm2, pma2)* valóban csoportok, mivel az őket generáló transzformációk szorzata nem vezet ki a halmazból.
Az is nyilvánvaló, hogy az egyetlen eltolást tartalmazó diszkrét egybevágósági csoportok bármelyike az előbb nyert hét fríz egyikével azonos, hiszen az egyetlen eltolás, a csak erre merőleges illetve ezzel párhuzamos tengelyre tükrözés illetve a középpontos tükrözések ( mint az egyetlen, pont körüli elforgatás) vagyis az *egyenest* önmagába vivő (diszkrét) egybevágóságai másként nem állnak elő.

Pogáts Ferenc

[1.] Pogáts Ferenc: A sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések.
http://matek.fazekas.hu/

[2.] Pogáts Ferenc: Rózsaablakok és társaik.
http://matek.fazekas.hu/