Pogáts Ferenc

A sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések

A címben foglaltak tárgyalása során támaszkodni fogunk Hajós György: *Bevezetés a geometriába (TANKÖNYVKIADÓ, Budapest, 1960)* c. tankönyvének a témánkat érintő fogalmaira és tételeire. Így különösen az első fejezet **2.3., 3.4** és **3.5., 6.1-5.** szakaszaira, valamint a második fejezet **11.** és **12.** paragrafusaira.

A szokásos jelöléseken túl, alkalmazzuk még az alábbiakat is: *a, b, c, … (latin kisbetűk)* nem csak egy-egy egyenest jelölnek, hanem jelenthetik a jelölt egyenesre vonatkozó tükrözést is.

ba jelöli az *a* egyenesre, majd ezt követően a *b* egyenesre vonatkozó tükrözést. Szóhasználatunkban ez: a két tükrözés *szorzata, egymásutánja.*

O, A, B, … (latin nagybetűk) nemcsak egy-egy pontot jelölnek, hanem jelenthetik a jelölt pontra vonatkozó tükrözést is.

BA jelöli az *A* pontra, majd ezt követően a *B* pontra vonatkozó tükrözést. Ez esetben szólhatunk a két tükrözés szorzatáról, egymásutánjáról.

F(0, φ) jelöli az *O* közepű, φ előjeles mértékű, pont körüli forgatást.

$\underline{T}$ eltolást jelöl, hosszát $|\underline{T}|$. Az eltolást az irányított $\underline{AB}$ szakasszal is megadhatjuk.

I az identikus leképezést, azt az egybevágóságot jelöli, amelyben minden pont képe önmaga. (Ez tehát az egyik legfontosabb (egybevágósági) transzformáció, a semmittevés).

Ha Φ, Ψ, Π, … (görög nagybetűk) egy-egy egybevágóság, akkor a $\Phi(P)=P$ azt jelenti, hogy a *P* pont fixpontja e transzformációnak.

A ΨΦ szorzat azt az egybevágóságot jelöli, amelyet a Φ, majd ezt követően a Ψ egybevágóság szolgáltat. (A Ψ^2 a ΨΨ szorzatot jelöli.)

A Φ^{-1} a Φ egybevágóság inverzét jelöli, vagyis azt a távolságtartó leképezést, amely a $\Phi(P)$ képpontokat az eredeti *P* pontba viszi vissza, azaz

$$\Phi^{-1}\,\Phi = \Phi\,\Phi^{-1} = I\,.$$

1. Forgatások, eltolások

1. TÉTEL: Az egymást *O* pontban metsző *a* és *b* egyenesekre vonatkozó *ba* tükrözésszorzat az *O* pont körüli *2AOBÐ* irányított szögű elforgatás, ahol *A*, ill. *B* az *a*, ill. *b* egyenesek egy-egy *O* –tól különböző pontja, vagyis jelöléseinkkel *ba=F(O; j =2AOBÐ).*

BIZONYÍTÁS: Jelölje P_a a sík egy tetszőleges *P* pontjának az ***a*** egyenesre vonatkozó tükörképét, míg P_b a P_a-nak *b* –re való tükörképét (1. ábra). Azt fogjuk megmutatni, hogy $OP=OP_b$, és a POP_b Ð (irányított) szög nem függ a *P* megválasztásától. A tükrözés távolságtartó voltából az

(1) $OP=OP_a=OP_b$,

szögtartó voltából pedig az irányított szögekre felírt

(2) POAÐ $=AOP_a$Ð , P_aOBÐ $=BOP_b$Ð

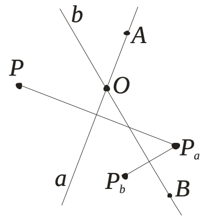
egyenlőségek következnek. Az irányított szögekre érvényes

POP_bÐ $=POA$Ð $+ AOP_a$Ð $+ P_aOB$Ð $+BOP_b$Ð

azonosságból, (2) felhasználásával.

POP_bÐ $=2AOP_a$Ð $+2P_aOB$Ð $=2(AOP_a$Ð $+P_aOB$Ð$)=2AOB$Ð

és ezzel bizonyítottuk állításunkat.



1. ábra

Tételünk megfordítása is igaz:

2. TÉTEL: A sík minden *F(O;φ) O* közepű, *φ* irányított szögű elforgatása végtelen sokféleképpen adható meg két, az *O* pontra illeszkedő ***a*** , ***b*** egyenesekre való ***ba*** tükrözésszorzattal, ahol ***a***-t a ***b***-be az *O* körüli, előjeles *φ/2* mértékű forgás viszi.

BIZONYÍTÁS: A két egyenest a jelzett módon választva, az 1. TÉTEL szerint az *F*(*O;φ=2AOB∠*) forgást kapjuk. A két egyenes egyikét, például ***a***-t tetszés szerint választhatjuk, az *O* pontra illeszkedő egyenesek közül.

3.TÉTEL: Az egymással párhuzamos ***a*** és ***b*** egyenesekre vonatkozó ***ba*** tükrözésszorzat egy ***T*** eltolás, amelynek hosszát és irányát a két egyenest merőlegesen összekötő ***AB*** irányított szakasz kétszerese adja, azaz ***T****=2****AB****.*

BIZONYÍTÁS: Legyen a sík egy tetszőleges *P* pontjának az *a* egyenesen lévő talppontja *A*, a *b* egyenesen pedig *B* (2. ábra). A tengelyes tükrözés távolságtartó és félsíkváltó tulajdonságából következik, hogy az irányított szakaszokra felírt

(1) $PA=AP_a$, $P_aB=BP_b$

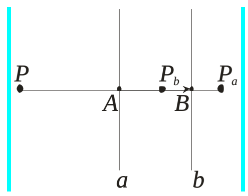
egyenlőségek teljesülnek. Mivel az irányított egyenesre illeszkedő, nem feltétlenül különböző pontokra a

$PP_b=PA+AP_a+P_aB+BP_a$

irányított szakaszokkal azonosság, ezért (1) miatt

$PP_b=2AP_a+2P_aB=2(AP_a+P_aB)=2AB,$

ami állításunkat igazolja, hiszen a *2AB* irányított szakasz nem függ – fentiek szerint –
a *P* pont megválasztásától.



2. ábra

A tétel alábbi megfordítása is igaz:

4. TÉTEL: Minden ***T*** eltolás végtelen sokféleképpen adható meg két párhuzamos ***a***, ***b*** egyenesre vonatkozó tükrözésszorzattal.

BIZONYÍTÁS: Legyen az a egyenes merőleges az eltolás irányára , és a vele párhuzamos, tőle $|\underline{T}|/2$ távolságra haladó b egyenest a $\underline{T}$ eltolással egyező irányú eltolással kapjuk az a egyenesből. Előbbi tételünk szerint $\underline{T} = ba$, és mivel $\underline{T}$ -re merőleges a választása tetszőleges volt, ezzel tételünket bizonyítottuk.

2. A középpontos tükrözések

5. TÉTEL: Két (különböző), a, b egyenesre vonatkozó tükrözésszorzat ba akkor és csak akkor kommutatív, azaz $ba=ab$, ha a két egyenes merőleges egymásra.

BIZONYÍTÁS: $ba=ab$, akkor és csak akkor, ha

$$(1) \qquad b(ba)=b(ab),$$

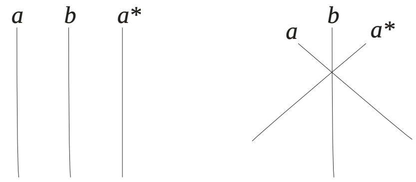
azaz a két oldalon álló tükrözésszorzatot követő, b egyenesre való tükrözésnek ezekkel való szorzata egyanaz az egybevágóság.
A leképezések asszociatív tulajdonsága miatt (1) akkor és csak akkor áll, ha

$$(2) \qquad (bb)a=b(ab),$$

azaz

$$(3) \qquad Ia = a = b(ab).$$

Legyen a^* egyenes az a egyenesnek a b egyenesére való tükörképe (3. ábra).



3. ábra

A 4. és a 2. TÉTELeink szerint a ba eltolás vagy forgatás, az a^*b eltolás vagy forgatás, azaz

$$ba=a^*b,$$

mivel (3)-ból az asszociatívitást is ismételten felhasználva

$$(4) \qquad a=b(ab)=(ba)b=(a^*b)b=a^*b)b=a^*(bb)=a^*I=a^*.$$

Ám az a egyenes pontosan akkor azonos a tükörképével, ha az a egyenes a tengely (vagyis $a=b$), vagy pedig az a merőleges a b egyenesre. Mivel feltettük, hogy a és b két (különböző) egyenes, ezért csak az utóbbi eset lehetséges.

DEFINICIÓ: Az egymásra merőleges a , b egyenesekre vonatkozó tükrözésszorzatot a két egyenes közös O metszéspontjára vonatkozó tükrözésnek (O közepű, 180°-os forgatás), röviden **középpontos** vagy **centrális** tükrözésnek nevezzük.

MEGJEGYZÉSEK:

(1) A 2. és az 5. TÉTEL szerint minden O közepű középpontos tükrözés végtelen sokféleképpen adható meg az O –ra illeszkedő két, egymásra merőleges egyenesre vonatkozó tükrözésszorzattal.

(2) Az 5. TÉTEL bizonyítása során beláttuk azt is, hogy a két, nem feltétlenül különböző a, b egyenesre vonatkozó ba tükrözésszorzat akkor és csak akkor kommutativ, ha $a=b$, vagy a ^ b.

(3) Az $ab=ba$ akkor és csak akkor áll, ha

$$(ab)(ba)=(ba)(ba),$$

azaz, ha az asszociativitást többszörösen felhasználjuk a bal oldali szorzatra, úgy

$$a(bb)a=a(I)a=a(Ia)=aa=I=(ba)(ba)=(ba)^2.$$

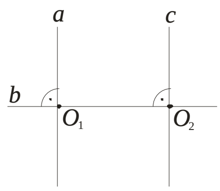
Ezek szerint egyrészt bármely két, nem feltétlenül különböző a, b egyenesre

$$(ab)^{-1}=ba,$$

vagyis az (ab) tükrözésszorzat inverze a ba, másrészt pedig a (ba) tükrözésszorzat kétszeri, egymás utáni alkalmazása pontosan akkor adja az identikus leképezést, ha $a=b$ vagy a ^ b, ha tehát ba maga az identitás ($a=b$) vagy $ba=(O; \pi)$.

6. TÉTEL: Legyen O_1 és O_2 két középpontos tükrözés. Az O_2O_1 tükrözésszorzat eltolás, mégpedig $2\cdot\underline{O_1O_2}$ –vel.

BIZONYÍTÁS: Legyen a b egyenes az O_1O_2 egyenes (ha $O_1=O_2$, akkor az O_1-re illeszkedő tetszőlegesen választott egyenes lesz a b), és az a legyen az O_1-ben b-re merőleges, c pedig az O_2-ben emelt, ugyancsak b-re merőleges egyenes (4. ábra).



4. ábra

A 2. és az 5. TÉTEL szerint

$$O_1=ba, \qquad O_2=cb,$$

azaz

$$\underline{O_2O_1}=(cb)(ba)=c(bb)a=c(I)a=c(Ia)=ca,$$

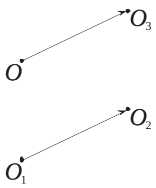
ami viszont a 3. TÉTEL szerint a $2\cdot\underline{O_1O_2}$ eltolás.

7. TÉTEL: Minden $\underline{T}$ eltolás végtelen sokféleképpen adható meg két O_1 , O_2 pontra vonatkozó O_2O_1 tükrözésszorzattal.

BIZONYÍTÁS: Ha a sík tetszőlegesen választott O_1 pontjához azt az O_2 pontot választjuk, amelyre a $2\cdot\underline{O_1O_2}=\underline{T}$, akkor előbbi tételünk miatt

$$O_2O_1=\underline{T}.$$

8. TÉTEL: A nem feltétlenül különböző O_1 , O_2 , O_3 pontokra vonatkozó $O_3O_2O_1$ tükrözésszorzat mindig egyetlen O pontra vonatkozó tükrözéssel azonos.



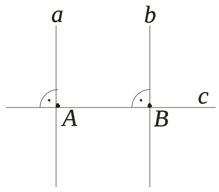
5. ábra

BIZONYÍTÁS: A 7. TÉTEL szerint az O_2O_1 tükrözésszorzat adta eltolást az O_3O tükrözésszorzattal is megadhatjuk, ha az O pontot úgy választjuk meg, hogy az
$O_3O = O_2O_1$ legyen (5. ábra). Eme választásra az asszociativitást többszörösen felhasználva

$$O_3O_2O_1=O_3(O_2O_1)=O_3(O_3O)=(O_3O_3)O=IO=O.$$

3. A csúszástükrözések

DEFINICIÓ: Az egymással párhuzamos *a, b* egyenesekre, majd az ezeket követő, rájuk merőleges *c* egyenesre vonatkozó *c(ba)* tükrözésszorzatot (valódi) **csúszástükrözésnek**, vagy **csúsztatva tükrözésnek** nevezzük (6. ábra).



6. ábra

MEGJEGYZÉSEK:

(1) A párhuzamos *a, b* egyenespárra való *ba* tükrözésszorzat a *2AB* eltolás, az ezt követő, *c* egyenesre való tükrözés pedig az eltolással egyállású egyenesre való tükrözés. A *6. ábra* csúszástükrözés tehát – definició szerint – egy eltolás, és egy ezzel egyállású egyenesre való tükrözés egymásutánja.

(2) A merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözésszorzat kommutatívitása miatt, felhasználva az asszociatív tulajdonságot is

$$c(ba)=(cb)a=(bc)a=b(ca)=b(ac)=(ba)c,$$

vagyis a csúszástükrözést adó két transzformáció (eltolás és tükrözés) sorrendje felcserélhető.

(3) A csúszástükrözés az egyik leghétköznapibb egybevágóság. Mióta az ember kétágú és talpra állt, mást sem tesz, mint nap mint nap ezt gyakorolja. (Lásd 7. ábra: a Fehér tenger homokos partján sétáló bennszülött lábnyomát, amint a kocsma felé tart .)

7. ábra

MEGÁLLAPODÁS: A tengelyes tükrözést is a csúszástükrözések közé soroljuk és **nem valódi**, illetve **valódi** csúszástükrözésről beszélünk aszerint, hogy $a=b$ vagy $a \| b$ (6. ábra).

E megállapodás szerinti szóhasználattal élve teljesül a

9. TÉTEL: Bármely három, nem feltétlenül különböző *a, b, c* egyenesre vonatkozó *cba* tükrözésszorzat (valódi vagy nem valódi) csúszástükrözés.

BIZONYÍTÁS: Ha az egyenesek között van két azonos, úgy

1., $a=b$ esetén $c(ba)=c(aa)=cI=c$;

2., $b=c$ esetén $cba=(cb)a=(bb)a=Ia=$a;

3., $a=c$ esetében pedig, ha b^* jelöli a b egyenesnek az a egyenesre vonatkozó tükörképét, úgy $ba=ab^*=cb^*$, tehát

$$cba=c(ba)=c(cb^*)=(cc)b^*=Ib^*=b^*,$$

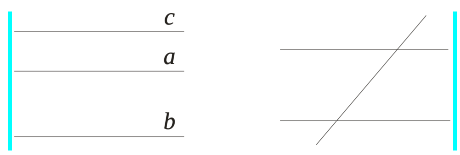
vagyis a most vizsgált esetekben igaz az állítás.

A továbbiakban feltesszük, hogy az egyenesek különbözőek. Ekkor kölcsönös helyzetüket tekintve vagy

van közöttük két párhuzamos

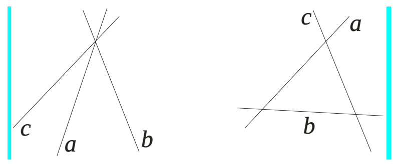
vagy

páronként metszik egymást.



8. ábra

Az első esetben az egyenesek vagy egymással párhuzamosak, vagy közülük pontosan két egyenes párhuzamos (és ezeket metszi a harmadik; 8. ábra).
A második esetben a három egyenes vagy ugyanabban a pontban, vagy páronként különböző pontokban metszi egymást (9. ábra).



9. ábra

Először azt fogjuk igazolni, hogy ha a három egyenes egy sugársorhoz tartozik (azaz párhuzamosak, vagy egy pontra illeszkednek), akkor

$$cba=d,$$

ahol a d egyenest ugyanaz az eltolás (ha $a \parallel b$), illetve forgatás (ha $a \nparallel b$) viszi a c egyenesbe, mint az a egyenest a b-be.

E választásra ugyanis

$$ba=cd$$

első négy tételünk miatt, és így

$$c(ba)=c(cd)=(cc)d=Id=d.$$

A még nem tárgyalt két esetet (két egyenesnek van közös pontja, ami mindhármójuknak nem pontja) egyszerre intézhetjük el.

A b egyenest az a és a c egyenesek legalább egyike metszi, különben három egymással párhuzamos egyenesünk lenne. Feltehetjük, hogy az a és a b egyenesek metszik egymást, mert ellenkező esetben az egymást metsző b és c egyenesekre szorítkozva ugyanúgy bizonyítanánk, mint így.

Legyen az a, b egyenesek közös pontja M, és illesszünk az M-re egy, a c egyenesre merőleges, f egyenest (10. ábra). Jelölje e azt az M ponton áthaladó egyenest , amelyet ugyanaz az M pont körüli forgatás visz az f egyenesbe, mint az a egyenest a b-be. E választásra

$$ba=fe,$$

vagyis

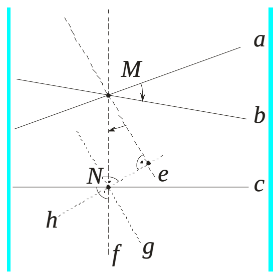
$$(1) \qquad c(ba)=(c(fe)=(cf)e.$$

Jelölje N az egymásra merőleges c és f egyenesek közös pontját. Mivel a cf tükrözésszorzatot bármely két, egymást az N-ben metsző, merőleges egyenesre vonatkozó tükrözésszorzattal előállíthatjuk, ezért az ilyenek közül válasszuk meg azt a g, h párt, amelyre $h \perp e$ teljesül. Ezzel a választással

$$cf=hg,$$

és (1) így alakul:

$$(2) \qquad c(ba)=(cf)e=(hg)e=h(ge).$$



10. ábra

Az e és a g egyenesek párhuzamosak, hiszen ugyanarra az egyenesre, h-ra merőlegesek (és különböznek, mivel e az M pontra, g pedig az M-től különböző N pontra illeszkedik), azaz (2) valódi csúszástükrözés.

Bizonyításunkból az is kiderült, hogy a három, nem feltétlenül különböző egyenesre vonatkozó tükrözésszorzat pontosan akkor valódi csúszástükrözés, ha van olyan pont, amelyik pontosan két egyeneshez tartozik.

Bizonyításunk konstruktív is abban az értelemben, hogy általa megadható (szerkeszthető) az az eltolás és az ezzel párhuzamos tengely, melyek meghatározzák a tétel szerinti csúszástükrözést.

A sík egybevágóságainak tükrözésszorzattal eddig tárgyalt eseteiben a fixpontok halmaza rendre:

a) ha az egybevágóság az I identitás, úgy a sík minden pontja;
b) ha az egybevágóság az a egyenesre tükrözés, úgy az a egyenes pontjai;

c) ha az egybevágóság (valódi) eltolás, úgy az üres halmaz;

d) ha az egybevágóság (valódi, azaz nem a teljes szög egész többszörösével történő) forgatás, úgy egyetlen pont, a forgáscentrum;

e) ha az egybevágóság (valódi) csúszástükrözés, úgy az üres halmaz.

Az első négy esetben per definitionem igaz az állítás.

Az e) esetben P fixpont, ha

$$(1) \qquad (c(ba))(P)=P.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(2) \qquad (c(ba))^2\,(P)=(c(ba))(P)=P.$$

Mivel $a \perp c$ és $b \perp c$, ezért

$$(c(ba))^2=(c(ba))(c(ba))=(cb)(ac)(ba)=(bc)(ca)(ba)=$$
$$=(b(cc)a(ba)=(bIa)(ba)=(ba)^2=(\underline{T})^2,$$

ezért (2) pontosan akor áll, ha

$$(\underline{T})^2(P)=P.$$

Ám a $\underline{T}$ eltolás négyzetének (vagyis $\underline{T}\times\underline{T}$ –nek) csakis akkor van fixpontja, ha $\underline{T}$ nem valódi eltolás, ha tehát $\underline{T}$ az identikus leképezés, azaz $a=b$, és így $c(ba)=c$ nem valódi csúszástükrözés.

Az eddigiek alkalmazásaként bebizonyítjuk:

A háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át.

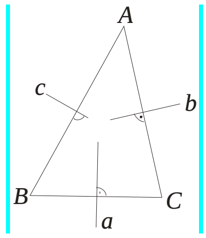
BIZONYÍTÁS: A 11. ábra jelöléseivel az a, b és c oldalfelező merőlegesekre vonatkozó cba tükrözésszorzat valódi vagy nem valódi csúszástükrözés. Mivel

$$(cba)(B)=B,$$

azaz B fixpontja a tükrözésszorzatnak, hiszen

$$a(B)=C, \qquad b(C)=A \qquad \text{és} \qquad c(A)=B,$$

ezért cba nem valódi csúszástükrözés. Az oldalfelező merőlegesek páronként metszik egymást, ezért az előbbiek szerint egy ponton kell átmenjenek.



11. ábra

4. Eltolások, forgatások szorzata

Ha a, b, c és d négy nem feltétlenül különböző egyenes, akkor a $dcba$ tükrözésszorzat az asszociativitás miatt

$$(dc)(ba)$$

alakban is írható. A nyert két tényező „két tükrös” szorzatok, tehát eltolások vagy forgatások. Ilyen szorzatokról szól a

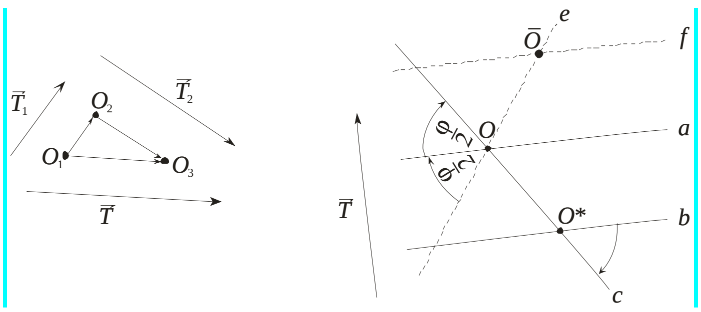
> 10. TÉTEL:
> **a)** Két, $\underline{T}_1 , \underline{T}_2$ eltolás $\underline{T}_2\, \underline{T}_1$ szorzata $\underline{T}$ eltolás;
> **b)** $\underline{T}$ eltolás és $F(O;\varphi)$ forgatás szorzata új középpont körüli ugyanolyan szögű forgatás;
> **c)** Két $F_1(O_1;\varphi_1),\ F_2(O_2;\varphi_2)$ forgatás $F_2\, F_1$ szorzata,
> ha $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi\, n,\ n \in Z$, akkor eltolás,
> ha $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 2\pi\, n$, akkor $\varphi_1 + \varphi_2$ szögű forgatás
> $O_1 = O_2$ esetén O_1 körül,
> egyébként pedig új O középpont körül.

A tételben adott egybevágóságokról feltettük, hogy egyikük sem az identitás, tehát valódi eltolásokról, forgatásokról, illetve ilyenek szorzatáról szól tételünk.

BIZONYÍTÁS:

a) A 7. TÉTEL szerint a $\underline{T}_1$ és $\underline{T}_2$ eltolások megadhatók az $(O_2 O_1)$ és $(O_3 O_2)$ tükrözésszorzatokkal, így

$$\underline{T}_2\, \underline{T}_1 = (O_3\, O_2)\,(O_2\, O_1) = O_3\,(O_2\, O_2)\, O_1 = O_3\, I\, O_1 = O_3\, O_1 = \underline{T}.$$



12. ábra

b) A 2. és 4. TÉTEL szerint mind a T eltolás, mind az $F(O;\varphi)$ elforgatás két egyenesre való tükrözésszorzattal előállítható, és mindkét transzformációban az egyik tükörtengely az O centrumra illeszkedő a T állására merőleges a egyenes legyen (12. ábra).

Az $F\,\underline{T}$ tükrözésszorzat tényezőit az ab, illetve ca tükrözésszorzatokkal állítjuk elő, ahol is $a \vdash b = |\underline{T}|/2$, és b–t az a-ba $\underline{T}$-vel egyező irányú eltolás viszi, továbbá a c egyenes az a egyenesnek az O pont körüli $\varphi/2$ szögű elforgatottja. Így

$$F\,\underline{T} = (ca)(ab) = c\,(aa)\,b = c\,(I)\,b = cb.$$

Mivel a b és c egyenes $\varphi/2 \neq \pi\, n$ miatt metszi az a egyenest, ezért metszi az a-val párhuzamos b egyenest is egy O^* pontban, és ezért b-t a c-be az O^* körüli ugyancsak $\varphi/2$ szögű forgatás viszi, tehát

$$F\,\underline{T} = cb = F^*(O^*;\varphi).$$

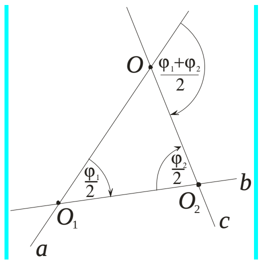
Ha az F forgatást követi a $\underline{T}$ eltolás, úgy ezeket az egybevágóságokat most az ae, illetve fa tükrözésszorzatok adják, melyekben az e, illetve f egyenes a c, illetve b egyenesnek az a egyenesre vonatkozó tükörképe (12. ábra).

Ezek szerint

$$\underline{T}\,F = (fa)(ae) = f(aa)e = f(I)e = fe.$$

Az $a \parallel f$ miatt, mivel e metszi a-t, ezért metszi a vele párhuzamos f egyenest is az O pontban és e-t az f-be az O pont körül ugyanaz a $\varphi/2$ szögű forgatás viszi, mint e-t az a-ba.

c) Ugyancsak a 2. TÉTEL szerint az F_1 és F_2 forgatások metsző egyenesekre vonatkozó tükrözésszorzatokkal adhatók meg, és a két forgatást előállító tükörtengelyek között legyen ott az O_1, O_2 forgásközéppontokra illeszkedő b egyenes (13. ábra).



13. ábra

Ha az a egyenest úgy választjuk meg, hogy őt az O_1 körüli $\varphi_1/2$ szögű forgás vigye a b egyenesbe, a c egyenest pedig úgy, hogy a b egyenest az O_2 körüli $\varphi_2/2$ szögű forgás vigye c-be, akkor e választásokkal

$$F_1(O_1;\varphi_1) = ba,$$
$$F_2(O_2;\varphi_2) = cb,$$

azaz

$$F_2F_1 = (cb)(ba) = c(bb)a = c(I)a = ca.$$

Az a és c (nem feltétlenül különböző) egyenesekre való tükrözések szorzata eltolást, vagy pont körüli forgatást ad.

Ha a két forgásközép O_1 és O_2 azonosak (ekkor a b egyenes tetszőlegesen választható az O_1-re illeszkedők közül), akkor $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ szögű, O_1 körüli forgatás viszi az a egyenest a c-be, így

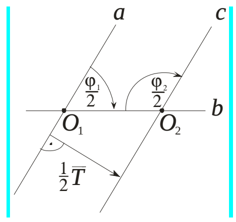
$$F_2F_1 = ca = F(O_1;\varphi_1 + \varphi_2),$$

amely F forgatás aszerint valódi vagy sem, hogy $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 2\pi n$ vagy $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi n$ $(n$ Î $Z)$ melyike teljesül.

Ha az O_1 és O_2 pontok különbözőek, akkor a rájuk illeszkedő a illetve c egyenesek pontosan akkor metszik egymást, ha $\varphi_1/2 + \varphi_2/2 \neq \pi n$ $(n$ Î $Z)$, és közös O pontjuk körüli $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ szögű forgatás viszi az a egyenest a c-be. Ez esetben tehát

$$F_2\,F_1 = ca = F(O;\varphi_1 + \varphi_2)$$

(13. ábra).



14. ábra

Ha most $(\varphi_1 + \varphi_2)/2 = \pi n$, de $\varphi_1/2 \neq \pi k$ $(k$ Î $Z)$, úgy az a és c egyenesek párhuzamosak (14. ábra) és

$$F_2F_1 = ca = \underline{T}.$$

Ha pedig $\varphi_1/2 = \pi k$, úgy $\varphi_2/2 = \pi m$, vagyis az a és c egyenesek azonosak, így

$$F_2F_1 = ca = aa = I.$$

és ezzel tételünket igazoltuk.

MEGJEGYZÉSEK:

(1) Az egyes esetek bizonyításaiban megszerkeszthettük azokat az egyeneseket, amelyekre való tükrözések egymásutánja az eredő egybevágóságot adja.

(2) Tételünkkel azt is igazoltuk, hogy bármely négy (nem feltétlenül különböző) egyenesre vonatkozó tükrözésszorzat mindig két (nem feltétlenül különböző) egyenesre vonatkozó tükrözésszorzattal azonos. Ebből eredően, ha t_1, t_2, t_3, …, t_n legalább négy, nem feltétlenül különböző egyenese a síknak, akkor az általuk képzett

$$(1) \qquad t_n\,t_{n-1}\ldots t_3\,t_2\,t_1$$

n tényezős tükrözésszorzat legfeljebb három (nem feltétlenül különböző) egyenesre vonatkozó tükrözés-szorzattal azonos, mivel tételünk szerint

$$t_4\,t_3\,t_2\,t_1 = s_2\,s_1,$$

ami által az (1)-beli n-tényezős szorzat n-2 tényezőssé válik. Ez az eljárás mindaddig ismételhető, amíg a maradó tükrözésszám legalább négy.

A sík egybevágóságainak tengelyes tükrözésszorzatokkal való előállíthatásáról szólnak az alábbi tételek.

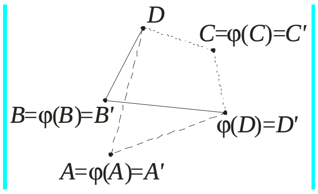
11. TÉTEL: Ha a sík valamely egybevágóságának van három, nem kollineáris fixpontja, akkor minden pont fixpont, vagyis az egybevágóság az I identitás.

BIZONYÍTÁS: Legyen a síkot önmagába vivő valamely Φ egybevágóságának három, nem egy egyenesre illeszkedő fixpontja az A, B és C, vagyis

$$A' = \Phi(A) = A; \quad B' = \Phi(B) = B;$$
$$(*) \qquad C' = \Phi(C) = C$$

(15. ábra). Indirekt okoskodunk. Tegyük fel, hogy a tétel állításával ellentétben van oly síkbeli D pont, amely nem fixpontja a Φ egybevágóságnak, azaz

$$D \neq \Phi(D) = D'.$$



15. ábra

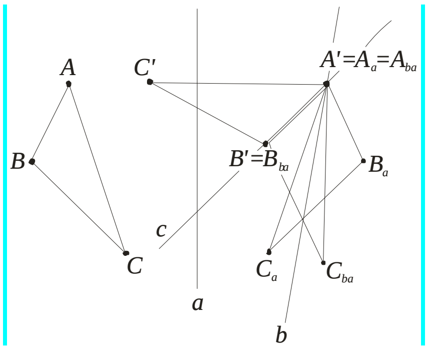
Az egybevágóság távolságtartó, azaz

$$CD = C'D' = CD',$$
$$BD = B'D' = BD',$$
$$AD = A'D' = AD',$$

a $(*)$ feltétel miatt, és így az A, B és C pontoknak a DD' szakasz felezőmerőlegesén kell lenniök, ami ellentmond a rájuk tett megszorításnak.

12. TÉTEL: A sík minden egybevágósága legfeljebb három (tengelyes) tükrözésszorzattal előállítható.

BIZONYÍTÁS: Elegendő azt megmutatnunk, hogy ha az egybevágóság a sík nem kollineáris A, B, C pontjaihoz az A', B' és C' pontokat rendeli, akkor ez legfeljebb 3 egyenesre vonatkozó tükrözésszorzattal elérhető.



16. ábra

Ugyanis, ha a Φ egybevágóság a nem kollineáris A, B, C pontokhoz az $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$ pontokat rendeli, akkor tekintsük azt a Ψ ponttranszformációt, amely a sík $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ és $\Phi(C)$ pontjait helybenhagyja, de a sík bármely más P pontjához a Φ egybevágóság adta $P' = \Phi(P)$ képét rendeli, azaz

$$\Psi: P \to \Phi(P),$$
$$\Psi(P) = \Phi(P) = P'$$

A Ψ leképezés egybevágóság, mivel bármely P, Q pontpárra, az ezek Ψ adta

$$\Psi(P) = \Phi(P) = P' \text{ és } \Psi(Q) = \Phi(Q) = Q'$$

képeinek távolsága, a Φ egybevágóság voltából következően, a PQ szakasz hosszával egyenlő.

A Ψ leképezésnek van három, nem kollineáris fixpontja, ezért előbbi tételünk szerint Ψ az identitás.

Ha tehát legfeljebb három tükrözés egymásutánja a nem kollineáris A, B, C pontokat a Φ adta képeibe viszi, akkor ez a tükrözésszorzat a sík minden pontját a Φ adta képébe viszi.

Legyen most az A, A' pontokat egymásba vivő tengely az a egyenes (16. ábra). Ha $A=A'$, akkor nincs szükségünk erre az egyenesre, illetve a rá vonatkozó tükrözésre.

Tükrözzük a síkot az a egyenesre. A pontok tükörképét rendre A_a, B_a, és C_a jelölje. E tükrözés az A pontot az A'-be viszi. A B_a pontot a B' –be vivő tengelyt jelölje a b (ha

$B_a = B'$, akkor ez a tengely felesleges). Tükrözzük a síkot a b egyenesre, és a pontok tükörképét jelölje rendre A_{ba} , B_{ba} és C_{ba} .

Az $A'B' = A_a B_a = A'B_a$ miatt az A' pont a b egyenesen van, tehát $A' = A_a = A_{ba}$. A tükrözés a B_a pontot a B pontba viszi, és így a ba tükrözésszorzat az A és B pontokat az A' , illetve B' pontokba viszi. Ha most C és C_{ba} különböző pontok (ellenkező esetben az állítás igazolásával készen vagyunk), akkor a c jelöli szakaszuk felező merőlegesét, úgy egyrészt ezen az egyenesen az $A_{ba} C_{ba} = A'C_{ba} = A'C$ és $B_{ba} C_{ba} = B'C_{ba} = B'C$ miatt az A' és a B' rajta van, másrészt pedig a cba tükrözésszorzat az A , B , C ponthármast az A' , B' , C' ponthármasba viszi. Ezzel tételünket igazoltuk.

A 10. TÉTELhez fűzött megjegyzésünk szerint a sík minden páros számú tényezőt tartalmazó tükrözésszorzata két tényezős szorzattá, míg a páratlan számú tényezőt tartalmazó tükrözésszorzat (egy vagy) három tényezős szorzattá redukálható.

Ezekről szól a

13. TÉTEL: A sík semelyik páros sok tényezőt tartalmazó tükrözésszorzata nem egyenlő egy páratlan sok tényezős tükrözésszorzattal.

BIZONYÍTÁS: Indirekt. Tegyük fel, hogy a síknak van olyan páros sok tényezős, azaz a lehetséges redukció miatt kéttényezős tükrözésszorzata, amely egy három- (vagy egy-) tényezős szorzattal azonos.

$$(1) \qquad t_2 t_1 = t_3 t_4 t_5$$

(Az (1)-ben $t_4 = t_5$ legyen, ha feltételünk egy tükrös egybevágóságról – ez legyen a t_3 - állítja a bal oldallal való azonosságot.)

Az (1) akkor és csak akkor áll, ha a $(t_2 t_1)$-gyel való szorzatukra is az egyenlőség áll, azaz ha

$$(2) \qquad I = (t_2 t_1)^{-1} (t_2 t_1) = (t_2 t_1)^{-1} (t_3 t_4 t_5) = t_1 \; t_2 \; t_3 t_4 t_5 \; .$$

A jobb oldali öt tényezős szorzat a 10. TÉTEL miatt három tényezőssé, azaz valódi vagy nem valódi csúszástükrözéssé redukálható, tehát

$$(3) \qquad I = cba$$

lenne, ami lehetetlen, mert a jobb oldali egybevágóság fixpontjainak halmaza nem egyezik meg a bal oldaliéval.

MEGJEGYZÉSEK

(1) A 12. és 13. TÉTELekkel a sík egybevágóságait tükrözésszámuk szerint is osztályozhatjuk:

0 tükrös	az I identitás,
1 tükrösek	a tengelyes szimmetriák,
2 tükrösek	a valódi (és nem valódi) eltolások, pont körüli forgatások,
3 tükrösek	a valódi (és nem valódi) csúszástükrözések.

(2) A sík egybevágóságai, az egymásutánisággal (szorzatukkal) csoportot[1] alkotnak. Tételeink szerint e csoport elemei a legfeljebb 3, nem feltétlenül különböző egyenesre való tükrözésszorzatok. Egységelem az I

---

[1] A nem üres H halmaz elemein értelmezett egy **szorzás**nak mondott művelet.

Ha minden a, b Î H –ra ba Î H teljesül, úgy a H halmazt e műveletre **zárt**nak mondjuk.

Ha minden a , b, c Î H –ra $cba = (cb) a = c (ba)$, akkor a művelet **asszociatív**.

Ha a H minden a eleméhez van olyan a^{-1} (–gyel jelölt) elem, hogy bármely b elemre

$$a a^{-1} b = b,$$

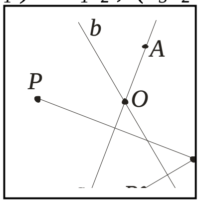
akkor a műveletet **invertálhatónak** , az a^{-1} elemet az a **inverzének** , és az aa^{-1} elemet **egységelemnek** nevezzük, és a továbbiakban e –vel jelöljük.

Ha a H halmaz a rajta értelmezett szorzásra nézve zárt, asszociatív és minden elemnek van inverze, akkor azt mondjuk, hogy H az adott műveletre nézve **csoportot alkot**.

Könnyen belátható, hogy csoportban $baa^{-1} = b$ és $aa^{-1} = a^{-1} a = e$ is fennáll.

identitás, mely az a egyenesre való kétszeri tükrözés a^2 , és bármely t_3 , t_2 , t_1 egyenesre

$$t_1^{-1} = t_1 \,,\ (t_2\, t_1)^{-1} = t_1\, t_2 \,,\ (t_3\, t_2\, t_1)^{-1} = t_1\, t_2\, t_3 \,.$$



(3) A 10. TÉTEL szerint a fenti csoportnak valódi részcsoportját adják a (nem feltétlenül különböző) két egyenesre való tükrözésszorzatok, vagyis a valódi és nem valódi eltolások és pont körüli forgatások.

Az eredeti egybevágósági csoportnak e részcsoport szerinti mellékosztályait a két tükrös egybevágóságok (eltolások, forgatások), illetve a három tükrös egybevágóságok a (valódi és nem valódi) csúszástükrözések adják, vagyis a csoportnak e részcsoport szerinti indexe 2.

Ugyancsak a 10. TÉTEL szerint az előbbi részcsoportnak egy további (kommutatív) részcsoportját az egyállású egyenesekre való két tényezős tükrözésszorzatok, vagyis a valódi és nem valódi eltolások adják.

A 13. TÉTEL szerint definiálhatók az alábbiak.

DEFINÍCIÓ:
A páros sok tényezőt tartalmazó tükrözésszorzatot **körüljárástartó,** míg a páratlan sok tényezőt tartalmazó tükrözésszorzatot **körüljárásváltó** egybevágóságnak mondjuk.

A fentiek szerint a körüljárástartó egybevágóságok egy részcsoportját adják a sík egybevágóságainak, mely részcsoport szerinti egyik mellékosztály a körüljárásváltó egybevágóságokból áll.

A $H' \subseteq H$ H –nak (nem üres) részhalmazát H részcsoportjának mondjuk, ha H' is csoport a H –beli művelettel.

Ha H' részcsoportja H –nak, akkor a $h \in H$ –val képzett hH' halmazt, ami az összes H' –beli elem (balról vett) h –val való szorzatának halmaza, a H –nak H' részcsoportja szerinti egyik **bal oldali mellékosztályá**nak nevezzük.

Az összes H –beli elemmel vett **bal oldali mellékosztály** az adott H halmaznak a H' **részcsoport szerinti bal oldali mellékosztályait** adják.

Nem nehéz belátni, hogy a H halmaz H' szerinti bal oldali mellékosztályai között, ha van kettőnek közös eleme, akkor minden elemük közös, és így a páronként diszjunkt (idegen) bal oldali mellékosztályok egyesítése maga a H .

A fentiek alapján képezhető a H –nak H' szerinti $H'h$ –val jelölt jobb oldali mellékosztályai.

A H csoport rendjén elemeinek számát értjük.

A mellékosztályok definíciójából rögvest következik, hogy **ha a H csoport véges, akkor bármely H' részcsoportjának a rendje osztója H rendjének**.

A H –nak H' részcsoportja szerinti mellékosztályok számát a H –nak e részcsoport szerinti **index**-ének mondjuk.