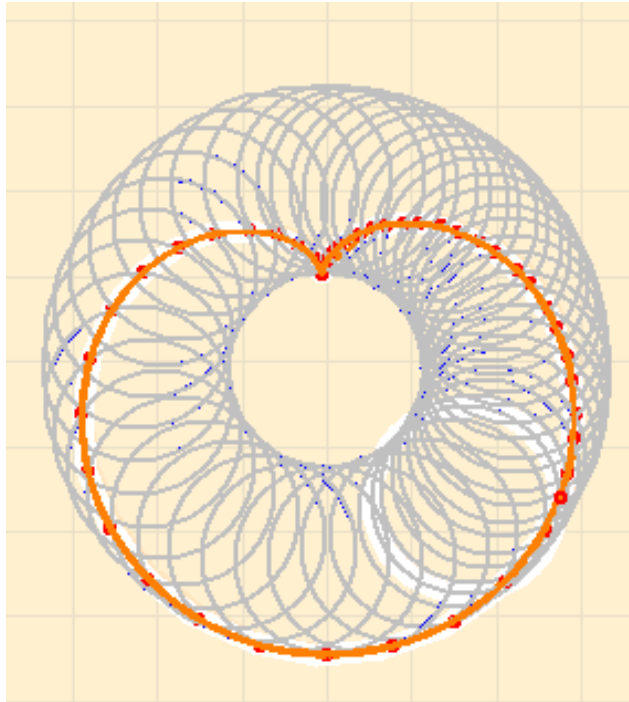


# Egy szív titkai



**Számítógép a matematikaórán középiskolában  
és egy kicsit azon túl**

## Bevezetés

Az itt közölt tanítási anyag három fő részből áll.

I. Hat feladat, amelyek megoldásához a diákoknak számítógépre, elsősorban geometriai szerkesztő illetve animációra is alkalmas szoftverre van szüksége. A feladatokat szoftverhasználat szerint két nehézségi osztályba sorolva olvashatjuk. A feladatok után azok részletesen leírt megoldásai következnek.

II. A feladatok eredményeinek összevetése, matematikai elemzése.

Az első két részből álló blokkot vegyes (gyakorló és továbbvivő, programozási és matematikai) feladatok és megoldásaik, továbbá kutatómunka javaslatok zárják.

III. Ismerkedés Morley tételével. A számítógép lehetőséget nyújt a háromszög és a kardiod tulajdonságainak a XX. század előtti időkben még rejtett világába, egy különleges tétel felfedezésének néhány pillanatába.

Az anyag végén irodalomjegyzékkel és az Euklides és Cabri program eszközkészletének áttekintő táblázataival próbálom segíteni az olvasót.

A háromrész feldolgozására kb. 3-3-3 órát javaslok, de a ráfordított idő nagyban függ a feldolgozás mélységétől és a nebulók előzetes számítástechnikai és matematikai ismereteitől.

Az oktatási anyagban a kísérletezős feladatok megoldását két geometriai szoftverrel mutatom be, a Cabri II. és az Euklides 2.4. verziójával. Azt hiszem, hasonlóan színvonalas termék a „Cinderella” és a „The Geometer’s Sketchpad”, de ezek alaposabb megismerésére nem jutott időm.

A Cabrit és az Euklideset gyakran használom, de nem vagyok bennük szakértő, azt hiszem lehetőségeik csak egy részét veszem igénybe. Nagyon szívesen fogadok tanácsot, javaslatot, akár ezekkel, akár a kísérleti anyag más aspektusaival kapcsolatban.

## Köszönetnyilvánítás

A tanítási anyag létrehozását a Középiskolai Modernizációs Alapítvány (KOMA) támogatta XLVIII. pályázatával (Módszertani pályázat). Három diák, a másfél éve végzett Salát Máté, a most nyolcadikos Kalló Bernát és Grósz Dániel hasznos szakmai tanácsokat adtak a szoftverekkel kapcsolatban. Idén végzett osztályom (a „bergengőcök”) alfa csoportjával géptermeztünk is és Morley tételéhez is eljutottunk, ők kérdéseikkel, gondolataikkal számos ponton hozzájárultak az anyag jelen verziójához. Dobos Sándor a pályázat megírása mellett egy matematikai észrevételével is segítséget nyújtott. Végül feleségem türelmére is nagy szükség volt a dolgozat létrejöttéhez.

Budapest, 2004. november

Hraskó András  
hraskoa@fazekas.hu  
1141, Bp., Tornóc u. 17

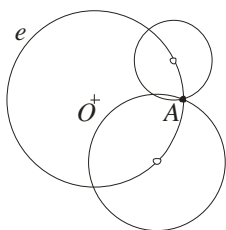
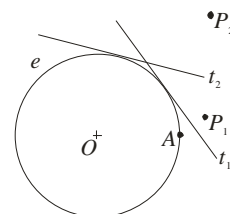
**I. Bevezető feladatok (gépterem)**

Az alábbi feladatokat külön-külön adjuk a gyerekeknek, mindegyiknek (vagy 2 fős csapataiknak) először csak egyet, majd ha kész, valamelyik másikat. Törekedjünk rá, hogy minél több feladatra szülessen megoldás. Hasznosan telhetnek el az órák azonban akkor is, ha mindössze 2-3 feladat megoldása sikerül, de a diákok közben tanulják a megfelelő szoftvert és sikerül feltárni a megoldott feladatok kapcsolatát (lásd a következő órák leírását).

**Kezdő szint**

**1.1. feladat**

Adott egy kör ( $e$ ) és rajta egy pont ( $A$ ). Tükrözzük az adott ( $A$ ) pontot a kör ( $e$ ) minden érintőjére.  
(Javaslat: Cabri, Euklides, Cinderella)

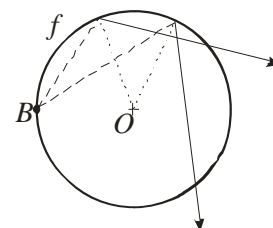


**1.2. feladat**

Adott egy kör ( $e$ ) és rajta egy pont ( $A$ ). Rajzoljuk meg az összes olyan kört, amelynek középpontja az adott körön ( $e$ -n) van és átmegy az adott ponton ( $A$ -n).  
(Javaslat: Cabri, Euklides)

**1.3. feladat**

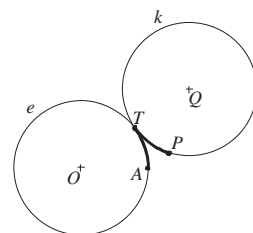
Rajzoljuk meg adott kör ( $f$ ) adott pontjából ( $B$ ) induló fénysugarak útját a körvonalon való első visszaverődés után. Mi fénylik fel a sugarak révén?<sup>1</sup>  
(Javaslat: Cabri, Euklides, Cinderella)



**Haladó szint**

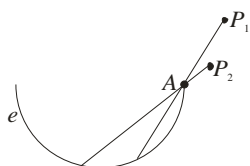
**2.1. feladat**

Egy kör ( $k$ ) alakú kerék csúszás nélkül gördül egy ugyanakkora sugarú rögzített kör ( $e$ ) körül. Rajzoljuk meg a mozgó kör kerülete valamely pontjának pályáját.  
(Javaslat: Cabri, Euklides)



**2.2. feladat**

$r$  sugarú félkör alakú gödörben lecsúszik egy  $2r$  hosszúságú pálca (a pálca alsó végpontja a körön fut, közben nekitámaszkodik a félkör  $A$  végpontjának). Hol mozog a pálca felső végpontja?  
(Javaslat: Cabri, Euklides, Cinderella)



**2.3. feladat**

Rajzold meg a komplex egységkör képét a  $z \rightarrow 2z - z^2$  transzformációnál!  
(Javaslat: Maple, Mathematica)

<sup>1</sup>Ahol „sűrűn vannak” a fénysugarak, az a rész felfénylik. Pld egy parabola alakú tükörbe a tengelyirányból jövő fénysugarak révén a fókuszpont fénylik fel. De ha a sugarak nem mennek át mind ugyanazon a ponton, de van egy görbe, amelyiket mindegyik érint, akkor a görbe mentén általában több sugár van, mint távolabb, így a görbe vonala felfénylik.

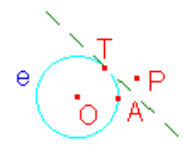
**Az 1.1.-1.3. feladatok megoldásai**

**1.2. feladat**

Adott egy kör ( $e$ ) és rajta egy pont ( $A$ ). Tükrözzük az adott ( $A$ ) pontot a kör ( $e$ ) minden érintőjére.

**Megoldás Cabrival**

<b>1.lépés</b>	Az $O$ , $A$ pontok felvétele.		$O$ $A$
<b>2.lépés</b>	Az $O$ kp-ú, $A$ -n átmenő $e$ kör felvétele. A Circle gomb után $O$ -ra, majd $A$ -ra klikkelünk.		$e$
<b>3.lépés</b>	A $T$ pont felvétele $e$ -n.		$T$
<b>4.lépés</b>	Az $OT$ egyenes felvétele (A Line gomb lenyomása után $O$ -ra, $T$ -re klikkelünk)		
<b>5.lépés</b>	Az $OT$ -re $T$ -ben merőleges $t$ egyenes felvétele (A Perp. Line gomb megnyomása után $T$ , $OT$ )		$t$
<b>6.lépés</b>	$t$ szaggatott megjelenítése		
<b>7.lépés</b>	Az $OT$ egyenes elrejtése (Hide)		
<b>8.lépés</b>	Az $A$ pont tükrözése $t$ -re: $P$ .		$P$



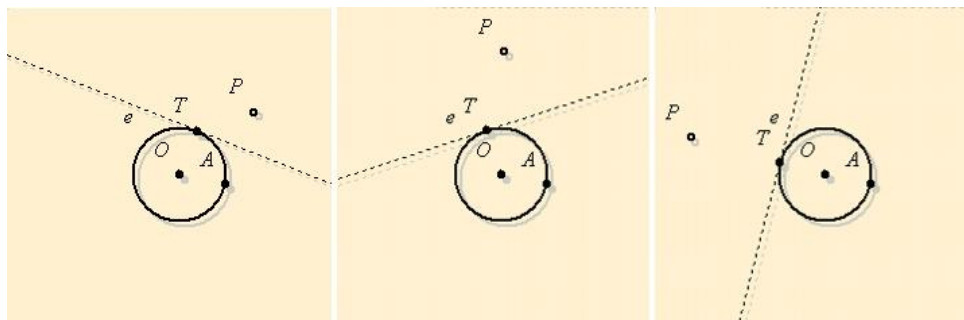
Ábránk lényegében kész, eljátszatunk vele ugyanúgy, ahogy az 1.1. feladat megoldásában a 15. a), b), c) lépéseknél írtuk. Lényegében ugyanazokhoz az ábrákhoz jutunk.

**Megoldás Euklidesszel**

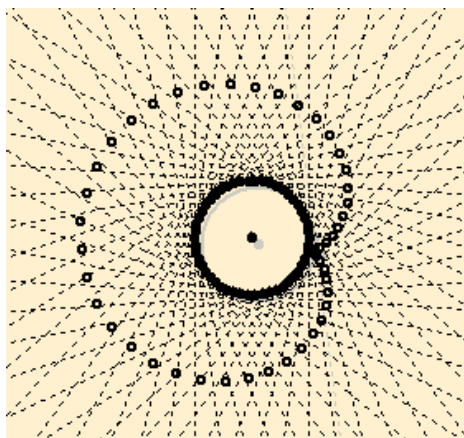
<b>1.lépés</b>	Az $O$ és az $A$ pont felvétele (Elnevezés: „Kijelölés” gombot nyomjuk meg és duplán klikkelünk az elnevezni kívánt objektumra).		$O$ $A$	
<b>2.lépés</b>	Az $O$ kp-ú $A$ -n átmenő $e$ kör felvétele		$e$	
<b>3.lépés</b>	A $T$ pont felvétele (nem tudjuk a körön)		$T$	
<b>4.lépés</b>	Az $OT$ egyenes felvétele			
<b>5.lépés</b>	Az $OT$ -re $T$ -ben merőleges $t$ egyenes felvétele		$t$	
<b>6.lépés</b>	$t$ egyenes szaggatottra rajzoljuk			
<b>7.lépés</b>	A tükrözése $t$ -re: $P$ .		$P$	

Az ábra lényegében kész, háromféleképpen is animálhatjuk.

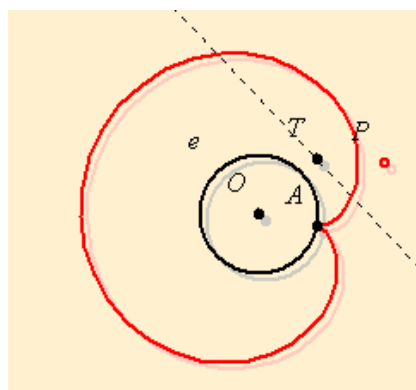
- 8.a)** Az „Animáció” menüben (tehát nem az eszköztárak között) az **lépés** „Animáció beállításai” lehetőséget választjuk, majd előbb  $T$ -re, utána az  $e$  körre klikkelünk.



- 8.b)** Ugyanazt tesszük, mint 7.a)-ban, de előzőleg az „Animáció” menüben **lépés** bejelöljük a „Fázisok egyidejű mutatása” opciót.



- 8.c)** Esetleg átszínezzük a  $P$  pontot. A „Nyomvonal” gombra **lépés** klikkelünk, majd sorban a  $T$  pontra, az  $e$  körre és a  $P$  pontra.




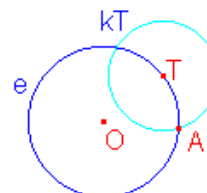
**1.3. feladat**

Adott egy kör ( $e$ ) és rajta egy pont ( $A$ ). Rajzoljuk meg az összes olyan kört, amelynek középpontja az adott körön ( $e$ -n) van és átmege az adott ponton ( $A$ -n).

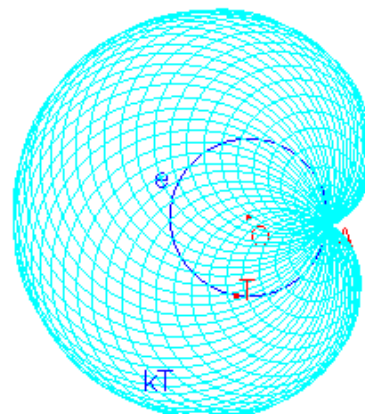
**Megoldás Cabrival**

**1-3. lépés** Mint az 1.1. fel. megoldásában

**4.lépés** A  $T$  kp-ú  $A$ -n átmenő  $k_T$  kör megrajzolása 





**5.lépés** A  $k_T$  kör nyomát láttatjuk, miközben  $T$ -t animáljuk  $e$ -n. (A Trace gomb megnyomása után  $k_T$ -re, Az Animation gomb megnyomása után rendre  $T$ -re,  $e$ -re klikkelünk

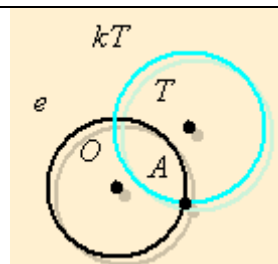


**Megoldás Euklidesszel**


**1-3. lépés** Mint az 1.2. fel. megoldásában

**4.lépés** Felvesszük a  $T$  kp-ú  $k_T$  kört  $A$ -n át. 

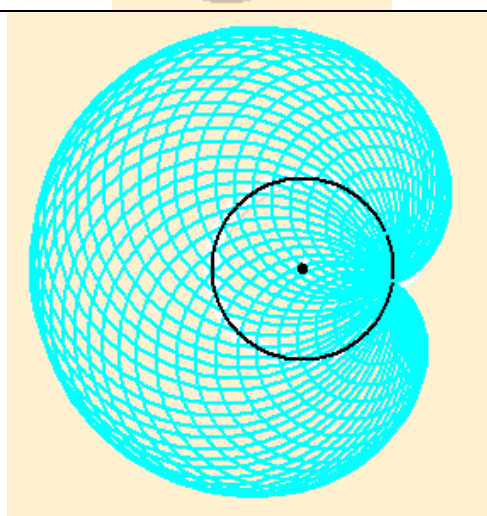
**5.lépés** Átszínezzük a  $k_T$  kört 



**6.lépés** Az „Animáció” menüben bejelöljük a „Fázisok egyidejű mutatása” opciót

**7.lépés (kihagyható)** Elrejtjük a  $T$  pontot, hogy szebb legyen az ábra 



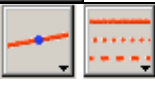
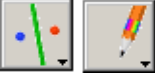



**8.lépés** Az „Animáció” menüben az „Animáció beállítása” pontot választjuk, és Shiftet lenyomva (hogy látszódjék  $T$ ) klikk:  $T$ ,  $e$ .

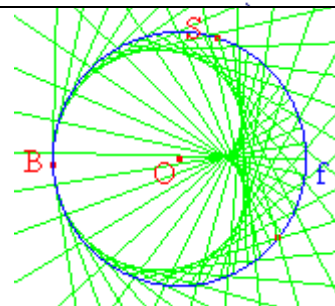
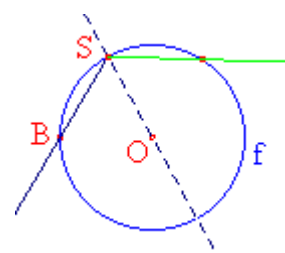


**1.3. feladat**









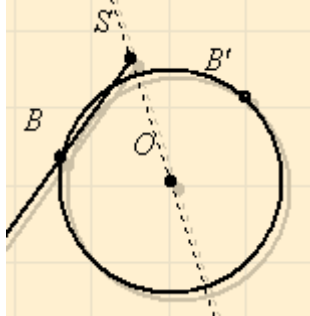






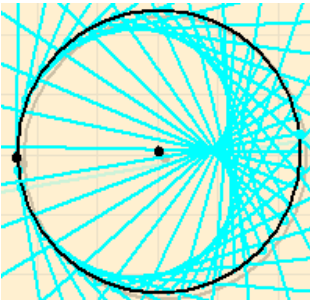
Rajzoljuk meg adott kör ( $f$ ) adott pontjából ( $B$ ) induló fénysugarak útját a körvonalon való első visszaverődés után. Mi fénylik fel a sugarak révén?

**Megoldás Cabrival**

<b>1.-3. lépés</b>	Az $O$ , $B$ pontok, az $O$ kp-ú $B$ -n átmenő $f$ kör felvétele, mint 1.1. megoldásában	
<b>4.lépés</b>	Az $S$ pont felvétele $f$ -en	
<b>5.lépés</b>	Az $SB$ félegyenes megrajzolása	
<b>6.lépés</b>	Az $SO$ tükörtengely megrajzolása, szaggatott jelölése	
<b>7.lépés</b>	$SB$ félegyeneset tükrözzük $SO$ -ra, így kapjuk a vizsgálandó fénysugarat, amit át is színezzünk.	
<b>8.lépés</b>	Elrejtjük (Hide) az $SB$ félegyeneset és az $OS$ tengelyt	
<b>9.lépés</b>	Bejelöljük, hogy látszódjék a fénysugár nyoma (Trace)	
<b>10.lépés</b>	Animáljuk az ábrát az $S$ pont $f$ -en való futtatásával.	



**Az 1.3. feladat megoldása Euklidesszel**

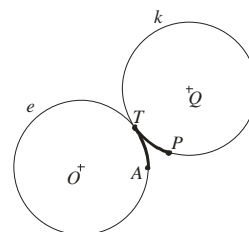
<b>1.-3. lépés</b>	Az $O$ , $B$ pontok, az $O$ kp-ú $B$ -n átmenő $f$ kör felvétele, mint 1.1. megoldásában		
<b>4.lépés</b>	Az $S$ pont felvétele (akárhol)		 $S$
<b>5.lépés</b>	Az $SB$ félegyenes megrajzolása		
<b>6.lépés</b>	Az $SO$ tükörtengely megrajzolása, kijelölése szaggatott jelölése, a szaggatott jelölés helyett a nem szaggatott visszaállítása	    	
<b>7.lépés</b>	A $B$ pontot tükrözzük $SO$ -ra ( $B'$ ).		 $B'$
<b>8.lépés</b>	Létrehozunk az $SB'$ félegyenest, ami a vizsgálandó fénysugár. Át is színezzük.		 
<b>9.lépés</b>	Elrejtjük az $SB$ félegyenest, az $OS$ tengelyt, a $B'$ és $S$ pontokat		
<b>10.lépés</b>	Bejelöljük az „Animáció” menüben a „Fázisok egyidejű mutatása” opciót.		
<b>11.lépés</b>	Animáljuk az ábrát az $S$ pont (Shiftet lenyomva megjelenik) $f$ -en való futtatásával.		



**A 2.1.-2.3. feladatok megoldása**

**2.1. feladat**

Egy kör ( $k$ ) alakú kerék csúszás nélkül gördül egy ugyankora sugarú rögzített kör ( $e$ ) körül. Rajzoljuk meg a mozgó kör kerülete valamely pontjának pályáját.

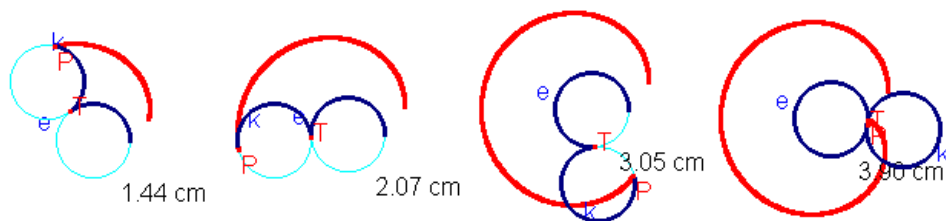


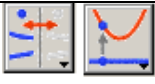
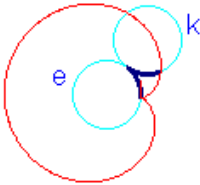
**Megoldás Cabrival:**

1-3. lépés	Mint az 1.1. fel. megoldásában		
4. lépés	Tükrözzük $O$ -t $T$ -re: $Q$ . A Symmetry gomb után előbb $O$ -ra, majd $T$ -re klikkelünk.		
5. lépés	A $Q$ kp-ú, $T$ -n átmenő $k$ kör felvétele.		
6. lépés	Segédpont felvétele az $AT$ íven: $I_0$ .		
7. lépés	Ív rajzolása $T$ -ből $I_0$ -n át $A$ -ig. Az Arc gomb után $T, I_0, A$ .		
8. lépés	A $T I_0 A$ ív hosszának mérése. A kapott szám elmozdítása, hogy ne legyen útban.		
9. lépés	Az $I_0$ pont elrejtése.		
10. lépés	Távolságtvitel (Measurement transfer): A $TA$ ívet átmásoljuk $k$ -ra $T$ -től. A Meas. Tr. vezérlógomb megnyomása után rendre a számra, a $k$ körre, $T$ -re klikkelünk		
11. lépés	A kapott pont $P$ . (Ha $P$ az ellenkező irányba került $k$ -n, mint akartunk, akkor berajzoljuk a $OT$ egyenest és tükrözzük rá.)		
12. lépés	Segédpont felvétele a $TP$ íven: $I_1$ .		
13. lépés	Ív rajzolása $T$ -ből $I_1$ -n át $P$ -ig.		
14. lépés	Az $I_1$ pont elrejtése.		



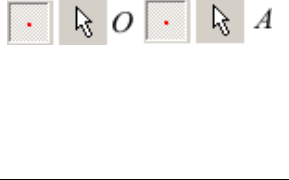
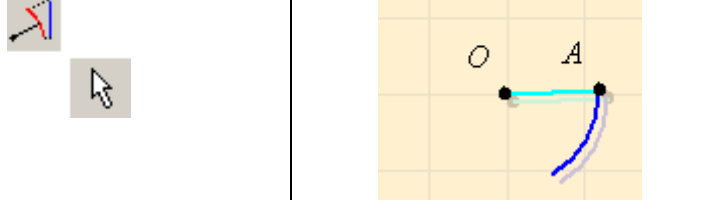
Ábránk lényegében kész, többféleképpen eljátszhatunk vele.

<p><b>15.a)</b> A kurzorral megfogjuk a <math>T</math> pontot és vonszoljuk a körön. Előzetesen bejelölhetjük, hogy <math>P</math> nyoma (Trace on/off) látszódjék</p>	
<p><b>15.b)</b> Bejelöljük, hogy <math>P</math> nyoma látszódjék (Trace on/off), majd Animációt indítunk, <math>T</math> mozogjon az <math>e</math> körön.</p>	



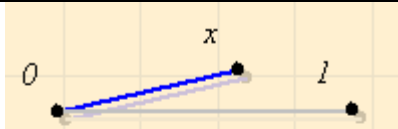














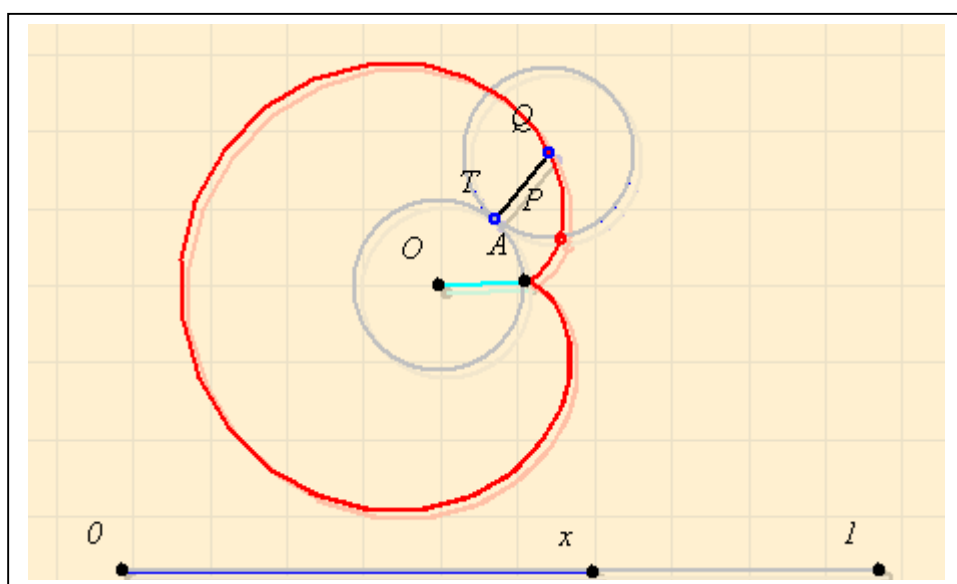
<p><b>15.c)</b> Bejelöljük <math>P</math> mértani helyét (Locus), miközben <math>T</math> fut az <math>e</math> körön. (Locus, <math>P</math>, <math>T</math> a sorrend). A fölösleges dolgokat elrejtjük.</p>		
--	---	--

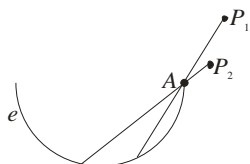
**Megoldás Euklidesszel**

<p><b>1.lépés</b></p>	<p>A paraméter futtatására szolgáló számegyenes 0 és 1 alappontjainak, továbbá az <math>x</math> pontnak (a paraméter) felvétele (később <math>x</math> fog futni az 01 szakaszon<sup>2</sup>, de most nem baj, ha nincs rajta).</p>	
<p><b>2.lépés</b></p>	<p>A 01 szakasz (a számegyenes), és az 0x szakasz (paraméter) felvétele</p>	
<p><b>3.lépés</b></p>	<p>Az <math>O</math>, majd az <math>A</math> pont felvétele (<math>O</math> az <math>e</math> kör kp-ja), <math>A</math> az <math>e</math> kör pontja, egyben a vizsgált pont kezdőhelyzete.</p>	
<p><b>4.lépés</b></p>	<p>Az <math>O</math> kp-ú, <math>OA</math> sugarú, <math>OA</math> kezdőirányú, <math>0x</math> ívhosszúságú ív felvétele. Ha készen vagyunk játsszunk, mozgassuk <math>x</math>-et!</p>	

<sup>2</sup>Azért kell szakaszt venni egyenes vagy félegyenes helyett, mert az egyenes görgetés így oldható meg jobban. Az ábrák mérete kedvéért eleinte aránytalanul rövid 01 szakaszt vettünk fel.

<b>5.lépés</b>	$O$ körül elforgatjuk $A$ -t az előbb kapott szöggel (az ív szögével), kapjuk a $T$ pontot.	  $T$	
<b>6.lépés</b>	$O$ tükörképe $T$ -re $Q$ .	  $Q$	
<b>7.lépés</b>	Felvesszük a $QT$ szakaszt (előbb $Q$ , majd $T$ )		
<b>8.lépés</b>	A $Q$ kp-ú, $QT$ sugarú, $QT$ kezdőirányú $0x$ hosszúságú ív felvétele		
<b>9.lépés</b>	$Q$ körül elforgatjuk $T$ -t az előbb kapott szöggel, kapjuk a keresett $P$ pontot.	  $P$	
<b>10.lépés</b>	Díszítésnek felvesszük az $O$ kp-ú $A$ -n átmenő $e$ kört és a $Q$ kp-ú $T$ -n átmenő $k$ kört, és kedvünkre színezzük.	   	
<b>11.lépés</b>	Ha kell, akkor a $0$ és $1$ pontokat áthelyezzük egymástól messze.		
<b>12.lépés</b>	Eljátszhatunk az ábrával úgy, hogy az $x$ pontot a „kijelölővel” mozgatjuk.		
<b>12.a)</b>	Az „Animáció” menüben (tehát nem az eszköztárak között) az „Animáció beállításai” lehetőséget választjuk, majd előbb $T$ -re, utána az $e$ körre klikkelünk. Hasznos lehet, ha a „Beállítások” menü „Egyebek” alpontjára klikkelünk és az „Animáció” részben nagy fázisszámot adunk meg és a pont futását lineárisra állítjuk.		
<b>12.b)</b>	Érdekes ábrát kapunk, ha $P$ -n és a $k$ körön kívül mindent elrejtünk, és az animáció indítása előtt bejelöljük az „Animáció” menü „Fázisok egyidejű mutatása” opciót.		
<b>12.c)</b>	Megjelentetjük a $P$ pont nyomvonalát, miközben $x$ fut a $01$ szakaszon. A „Nyomvonal” gomb megnyomása után sorban $x$ -re, a $01$ szakaszra, majd $P$ -re klikkelünk.		



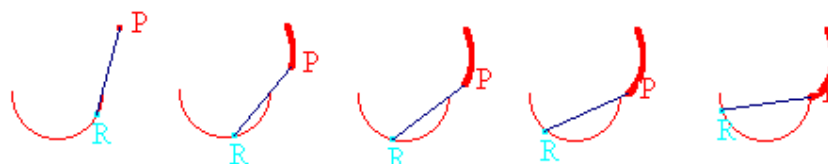


**2.2. feladat**

$r$  sugarú félkör alakú gödörben lecsúszik egy  $2r$  hosszúságú pálca (a pálca alsó végpontja a körön fut, közben nekítámaszkodik a félkör  $A$  végpontjának). Hol mozog a pálca felső végpontja?

**Megoldás Cabrival**

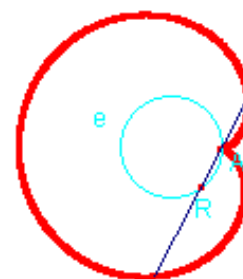
<b>1-3. lépés</b>	Mint az 1.1. fel. megoldásában		
<b>4. lépés</b>	$A$ tükörképe $O$ -ra $A^*$ .		$A^*$
<b>5. lépés</b>	$I_2$ segédpont az (alsó) $AA^*$ íven.		$I_2$
<b>6. lépés</b>	Az $AI_2A^*$ ív megrajzolása.		
<b>7. lépés</b>	Az $e$ kör eltüntetése (Hide)		
<b>8. lépés</b>	$R$ pont felvétele az $AI_2A^*$ íven.		$R$
<b>9. lépés</b>	$R$ tükrözése $O$ -ra ( $R^*$ ).		$R^*$
<b>10. lépés</b>	$k_R$ kör $R$ kp-tal $R^*$ -át.		
<b>11. lépés</b>	Félegyenes (Ray) $R$ -ből $A$ -n át.		
<b>12. lépés</b>	A félegyenes és $k_R$ metszéspontja $P$ .		$P$
<b>13. lépés</b>	Felvesszük az $RP$ szakaszt (segment) és eltüntetjük (Hide) a fölösleges dolgokat.		
<b>14.a)</b>	Láttatjuk $P$ nyomát (Trace), majd animáljuk $R$ -t az $AI_2A^*$ íven.		



**14.b)** Kirajzolhatjuk  $P$  mértani helyét (Locus) miközben  $R$  fut az íven.

**2.2.1. Megjegyzés**

Érdeemes a félkör helyett a teljes  $e$  körön végigfuttatni  $R$ -t és az  $RP$  félegyenes helyett az  $RP$  egyenest megrajzolni, majd annak a  $k_R$  körrel való mindkét metszéspontját nyomkövetni. Úgy a teljes kardioidot megkapjuk.



**A 2.2. feladat megoldása Euklidesszel**

Az Euklidészben nem lehet futtatni pontot köríven, csak a teljes körön, így a félkört csak a látvány kedvéért készítjük el.

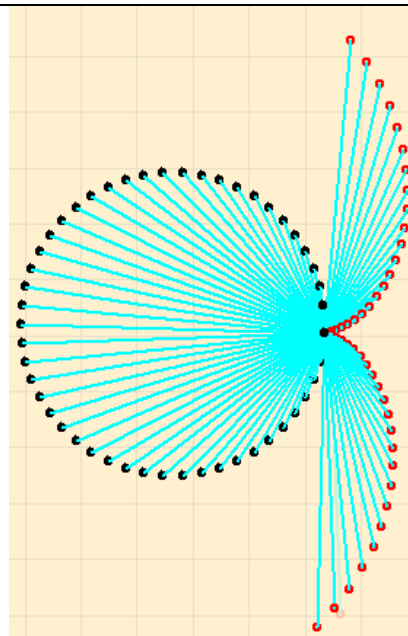
<b>1-3. lépés</b>	Mint az 1.2. fel. megoldásában		
<b>4.lépés</b>	A tükörképe $O$ -ra $A^*$ .		
<b>5.lépés</b>	$I_2$ segédpont az (alsó) $AA^*$ íven: pont felvétele akárhol; elnevezése; gravitáció bekapcsolása; pont rámozgatása a körre.		
<b>6.lépés</b>	$I_3$ segédpont felvétele $A^*$ közelében, alatta.		
<b>7.lépés</b>	Az $OA$ , $OI_3$ félegyenesek megrajzolása		
<b>8.lépés</b>	Az $e$ kör eltüntetése		
<b>9.lépés</b>	Körív rajzolása $O$ kp-tal $I_2$ -n át, az $OA$ , $OI_3$ félegyenesirányok között		
<b>10.lépés</b>	A körív „Körüljárásos értelmezésűvé” tétele		
<b>11.lépés</b>	$I_3$ mozgatása, hogy az $OI_3$ félegyenes átmenjen $A^*$ -on.		
<b>12.lépés</b>	A fölösleges dolgok elrejtése		
<b>13.lépés</b>	Az $R$ pont felvétele (akárhon)		
<b>14.lépés</b>	$R$ tükörképe $O$ -ra (Shift-tel megjelenik, ha eltüntetjük) $R^*$ .		
<b>15.lépés</b>	Az $R$ kp-ú $R^*$ -n átmenő kör megrajzolása		
<b>16.lépés</b>	Az $RA$ félegyenes megrajzolása		
<b>17.lépés</b>	A kör és a félegyenes metszéspontja $P$		

**18.lépés** A fölösleges dolgok elrejtése, színezés.



**19.a)** Az „Animáció” menüben (tehát nem az eszköztárak között) az „Animáció beállításai” lehetőséget választjuk, majd előbb  $R$ -re, utána (Shift lenyomása mellett) az  $e$  körre klikkelünk.

**19.b)** Ugyanezt tesszük, de megelőzően bejelöljük az „Animáció” menü „Fázisok egyidejű mutatása” opcióját.

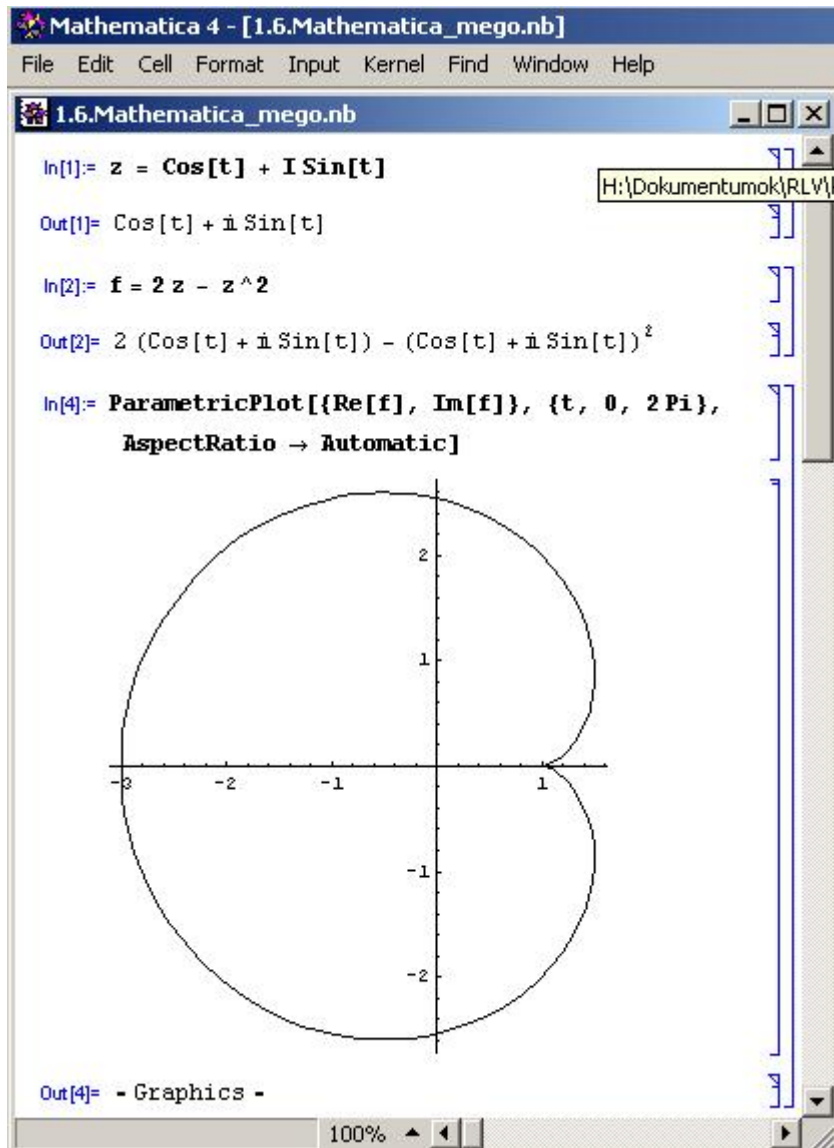


Most a kardioid egy részlete látható az ábrán. A teljes görbe megjelenítéséhez lásd a Cabri-s megoldás végére írt 2.2.1. Megjegyzést.

2.3. feladat

Rajzold meg a komplex egységkör képét a  $z \rightarrow 2z - z^2$  transzformációnál!

Megoldás Mathematica-val



II. A feladatok elemző összevetése (Tanterem, projektor)

- A. Ha szükséges: bemutató az eredményekből.
- B. A diákok az előző egy-két fős „csapatok” párjaiból létrejött munkacsoportokban dolgoznak a következő problémán:

3.1. probléma

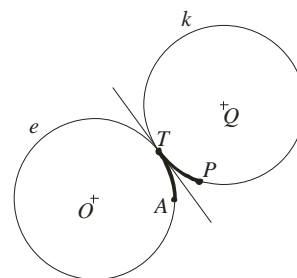
Az 1.1 – 2.3. feladatokban mintha ugyanaz a görbe jelennek meg (2.2.-ben a 2.2.1. Megjegyzésben tett kiegészítéssel). Tényleg így van?

3.2. Értelmezés

A 2.1. feladatban szerepel a „csúszás nélkül gördül” kifejezés. Ez azt fejezi ki, hogy a gördülő körön és a fix körön azok a részek, amelyek érintkeztek már egymással mindig egyenlő hosszúak (ívhosszuk a megfelelő körökön egyenlők).

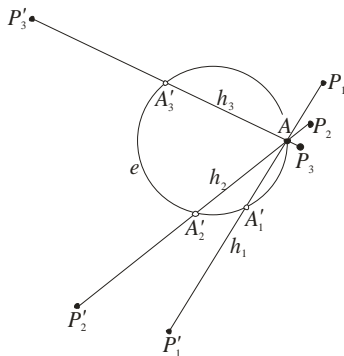
3.3. Állítás

1.1. és 2.1. ugyanazt a görbét definiálja. Tükrözzük ugyanis A-val együtt a fix (e) kört is az érintőre. A kapott kép épp a mozgó (k) kör egy lehetséges helyzete, rajta A képe, P, a k körre rögzített pont aktuális helyzete, ha a mozgás kezdetekor épp A-val egyezett meg (lásd az ábrát).



3.4.Értelmezés (kardioid)

Az 1.1. (és ekvivalensen a 2.1.) feladatban definiált görbét kardioidnak nevezzük. Tehát adott egy e kör és rajta az A pont, az általuk definiált kardioidra akkor és csakis akkor illeszkedik a P pont, ha az AP szakasz felezőmerőlegese érinti e-t (A is pontja a kardioidnak, a kardioid szinguláris pontjának nevezzük). Az e kör O középpontját a kardioid centrumának, az OA (fél)egyenest a kardioid tengelyének nevezzük. A kardioid szimmetrikus a tengelyének egyenesére vonatkozó tükrözésre.



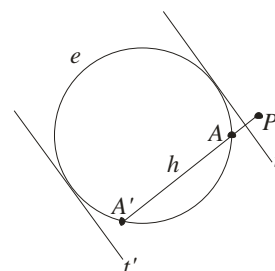
3.5. Állítás

- a) A 2.2. feladat a kardioid egy ívét definiálja.
- b) Legyen e tetszőleges kör, sugara r, a körön A rögzített pont. Tekintsük az A ponton áthaladó h egyenest és annak e-vel való A, A' metszéspontjait. Mérjük fel e-re A'-ből mindkét irányban a 2r átmérőt. A kapott pontok mértani helye kardioid, ha h az összes lehetséges helyzetét felveszi.

Bizonyítás

Elegendő a b) részt megindokolni, abból következik a). Rajzoljuk meg az e kör h-ra merőleges t, t' érintőit. Az ábra – e, A, A', t, t' – szimmetrikus az e kör h-ra merőleges sugarának egyenesére. Mivel A'P = 2r és t, t' között is épp 2r a távolság így P és t távolsága megegyezik A' és t' távolságával. A szimmetria miatt A' és t' távolsága megegyezik A és t távolságával is, így P az A tükörképe t-re. Hasonlóan kapjuk, hogy A-nak a t'-re vonatkozó P' tükörképére A'P' = 2r. Ha h befutja az összes A-n átmenő egyenest, akkor t és t' befutja e összes érintőjét, így valóban kardioidhoz, az 1.2. feladat kardioidjához jutunk.

Először kérdezzük meg a diákokat, hogyan értelmeznék a kardioid belső és külső pontjait, utána térjünk rá az alábbi definícióra. Az érintő értelmezését (tárgyalását lásd később) is vitával, beszélgetéssel készítsük elő.





### 3.6. Értelmezés (kardioid belső és külső pontjai)

Az  $e$  kör és az  $A$  pont által meghatározott kardioid belső pontjának nevezzük  $P$ -t, ha az  $AP$  szakasz felezőmerőlegese metszi  $e$ -t, míg  $P$  külső pont, ha a felezőmerőlegesnek nincs közös pontja  $e$ -vel.

### 3.7. Állítás

Az 1.2. feladatban meghatározott körök uniója megegyezik az  $e$  és  $A$  által meghatározott kardioid pontjainak és belső pontjainak uniójával.

### Bizonyítás

Tekintsük az  $e$  kör tetszőleges  $T$  pontját, a  $T$  középpontú  $A$ -n átmenő  $k_T$  kört és valamely erre illeszkedő  $P$  pontot.  $AP$  a  $k_T$  kör húrja, így felezőmerőlegese átmegy  $T$ -n. Ha a felezőmerőleges  $T$ -ben érinti  $e$ -t, akkor definíció szerint  $P$  a kardioid pontja, míg ha metszi  $e$ -t, akkor belső pont. Tehát a vizsgált  $k_T$  körök uniója valóban a kardioid pontjai és belső pontjai halmazának része.

Másképp, ha  $P$  tetszőleges pont a kardioidon vagy annak belsejében, akkor az  $AP$  szakasz felezőmerőlegese definíció szerint érinti vagy metszi az  $e$  kört. A  $T$  érintési vagy metszéspont körüli  $A$ -n átmenő körre ilyenkor  $P$  is illeszkedik, tehát a kardioid pontjainak és belső pontjainak halmaza része a vizsgált körök uniójának. A levezetésből az is kiderült, hogy a kardioid belső pontjain pontosan két  $T$ ee pont esetén megy át a  $k_T$  kör, míg a kardioid pontjain egy és csakis egy  $T$ ee pontra megy át a  $k_T$  kör.

### 3.8.a. Értelmezés (kardioid érintője, fizikai megközelítés)

Azt mondjuk, hogy az  $f$  egyenes a  $P$  pontban érinti a  $k$  kardioidot, ha 2.1.-ben a mozgó pont  $P$ -beli helyzetében a pillanatnyi sebesség vektora az  $f$  egyenesre esik.

### 3.8.b. Értelmezés (kardioid érintője, geometriai megközelítés)

Azt mondjuk, hogy az  $f$  egyenes a  $P$  pontban érinti a  $k$  kardioidot, ha  $P \in f \cap k$  és  $P$  egy környezetében  $f$  minden  $P$ -től különböző pontja külső pontja a kardioidnak.

### 3.9. Állítás

A kardioidnak az  $A$  szinguláris pontján kívül mindegyik pontjában egy és csakis egy érintője van a 3.8.a és a 3.8.b definíciónak megfelelően is, és ez a két érintő mindegyik esetben egybeesik egymással. Az állítást itt nem bizonyítjuk.<sup>3</sup>

### 3.10. Állítás

A kardioid nem szinguláris  $P$  pontjában a fizikai értelmű érintő

a) merőleges a  $PT$  egyenesre, ahol  $T$  a mozgó  $k$  kör és a fix  $e$  kör aktuális érintési pontja.

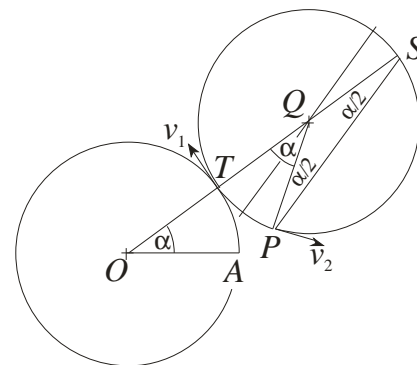
b) átmegy a mozgó  $k$  körnek a fix  $e$  körrel való  $T$  aktuális érintési pontjával átellenes  $S$  pontján.

c) az  $OA$  szimmetriatengellyel bezárt szöge

$(3/2)TOA\angle$ .<sup>4</sup>

### Bizonyítás

Valóban, a mozgás két összetevőből áll. Egyrészt a  $k$  kör haladó mozgásából, amely aktuálisan az  $e$  (és egyben  $k$ )  $T$ -beli érintőjének irányában történik, másrészt  $k$  forgásából, amely  $P$ -ben egy érintőirányú sebességkomponenst eredményez. A két összetevő



<sup>3</sup>Algebrai görbénél (lásd az 5.4. feladatot!) az érintő algebrai definíciója is fontos: olyan egyenes, amelyre megszorítva a görbe egyenletét, az adott pont multiplicitása nagyobb, mint a ponton átmenő többi egyenesen (véges sok kivételével). Így pld a szimmetriatengely is érintő a szinguláris pontban.

<sup>4</sup>Lásd a 3.11. Értelmezést!

abszolútértéke egyenlő, ez felel meg a csúszás nélkül gördülésnek. Így eredőjük az irányuk szögfelezőjének irányába mutat. Mivel a két sebességvektor komponens szimmetrikus a  $TQP$  szög szögfelezőjére és egyenlő hosszúak is, így eredőjük párhuzamos a szögfelezővel. Innen egyszerű geometriai okoskodással igazolható az állítás a), b) és c) része is.

A kardioid görbe paraméteres előállítás után differenciálás segítségével is igazolható az állítás.

### 3.11. Értelmezés

Két egyenes szögén az egyenesek által bezárt szögek közül a nem tompaszöget szokás érteni. Ettől 3.10.c)-ben, és később, a 8.1. feladatban és a 9.1. lemmában eltértünk illetve el fogunk térni, amennyiben a kardioid valamely pontjához tartozó érintőegyenest és a kardioid tengelyének szögéről van szó. Ezen a szögön azt a  $\theta$  értéket értjük, amelyre  $AOT\angle = \alpha = 2\theta/3$ , ahol  $T$  a  $P$  érintési ponthoz, mint a kardioid egy pontjához aktuálisan tartozó mozgó  $k$  kör és a fix  $e$  kör érintési pontja.

Mivel  $\alpha$  értéke  $0^\circ$ -tól  $360^\circ$ -ig nő, így  $\theta$  értéke a  $[0^\circ, 540^\circ)$  intervallumban bármi lehet. Tehát még körbemegyünk a kardioidon az érintővektor  $540^\circ$ -ot fordul. A pont fordított irányú sebességgel érkezik vissza az  $A$  pontba, mint ahogy elindult és ahogy tovább is kell mennie. Az animáción jól látszik, hogy a mozgó pont  $A$ -ban megáll, lassan indul tovább lényegében arról, ahonnan jött. Az összefüggésből az is következik, hogy bármely irányval párhuzamosan pontosan három érintője van a kardioidnak.

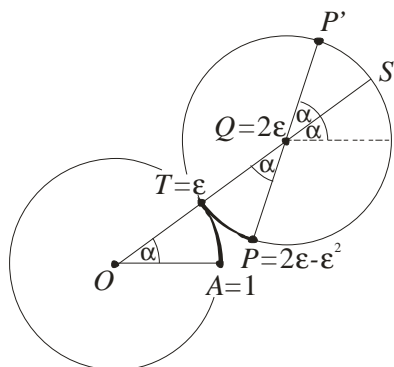
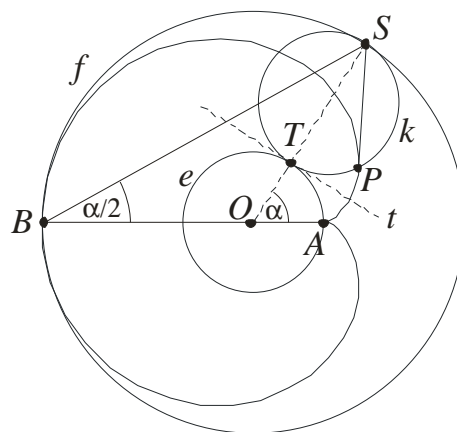
### 3.12. Állítás

Az 1.3. feladatban definiált egyenessereg megegyezik egy kardioid érintőegyeneseinek halmazával. A kardioidot meghatározó  $e$  kör koncentrikus  $f$ -fel és harmadakkora sugarú, szinguláris pontja az  $OB$  félegyenessel ellenkező félegyenesre esik.

### Bizonyítás

Tekintsük az  $f$  kör  $B$  pontjából induló, a kör  $S$  pontjában tükröződő fénysugarat. A fénysugár az  $f$  körvonalon  $S$ -ben való tükröződés után a fizika törvényei szerint a  $BS$  egyenes  $OS$ -re vonatkozó tükörképén halad. A  $BSO$  háromszög egyenlő szárú, ha  $SOA\angle = \alpha$ , akkor  $SBO\angle = BSO\angle = \alpha/2$ .

Tekintsük ugyanakkor az  $e$  körül guruló  $k$  körnek azt a helyzetét, amelyben épp az  $OS$  szakasz  $T$  pontjában érinti az  $e$  kört (lásd a mellékelt ábrát). A 3.10. Állítás b) része szerint a kardioid aktuális  $P$  pontjában az érintő épp  $S$ -en megy át, a c) részből pedig adódik, hogy  $PSO\angle = \alpha/2$ . Ezzel az állítást igazoltuk.



### 3.13. Állítás

A 2.3. feladatban is a kardioidot kapjuk.

Valóban, ha az  $O$  pont a  $0$  komplex számnak,  $A$  az  $1$ -nek, tehát  $e$  az egységkörnek felel meg, akkor az  $\varepsilon$  egységyi komplex szám megegyezik a  $k$  mozgó kör és az  $e$  fix kör  $T$  érintési pontjának valamely időpillanatban. Ekkor a mozgó  $k$  kör  $Q$  középpontja  $2\varepsilon$ , a kardioid  $P$  pontjának  $Q$ -ra vonatkozó  $P'$  tükörképére  $QP' = \varepsilon^2$ , így  $P$  a  $2\varepsilon - \varepsilon^2$  pontnak felel meg.

### További feladatok (Részben gépterem)

Az 5.1., 5.2. példák az előző fejezetekben elmondottak felelevenítését, új interpretációját igénylik, tehát gyakorló jellegű példák. Az 5.3., 5.4. feladatok megoldása az előzőekben nem használt technikát igényel.

#### 5.1. feladat

Oszd fel a körvonalat 36 egyenlő ívre és az osztópontokat számozzuk 0-tól 35-ig, majd kössük össze az  $n$ -edik osztópontot a  $2n$ -edik osztóponttal (mod 36). Mutassuk meg, hogy az így kapott egyenesek egy kardioidot érintenek!

#### 5.2. feladat

Guruljon most egy rögzített  $e$  kör körül egy feleakkora sugarú  $k$  kör. A  $k$  kör valamely pontja által leírt görbét *nefroid*nak (vesegörbe) nevezik.

a) Ábrázold a nefroidot!

b) Határozd meg a nefroid valamely pontjában az érintőegyenest a 3.10. Állításhoz hasonló módon!

c) Mutasd meg, hogy a párhuzamos fénysugarak egy félkör belső felületén való tükröződés után egy nefroidot érintenek (tehát nefroidot látunk a teáscsészében). Ábrázold is a fénysugarakat!

#### 5.3. feladat

a) Írd fel a kardioid paraméteres egyenletrendszerét! Legyen pld  $\alpha = \angle AOT$  a mozgó  $k$  kör és a fix  $e$  kör  $T$  érintési pontjának forgásszöge, és írd fel a kardioid aktuális  $P$  pontjának koordinátáit leíró  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$  függvényeket.

b) A kapott függvények deriválásával határozd meg a  $P$  pontbeli sebesség irányát!

c) Adj új bizonyítást a 3.10. állításra!

d) Határozd meg a kardioid teljes ívének hosszát!

#### 5.4. feladat

Algebrai görbe-e a kardioid? Ha igen, adj meg olyan polinomot, amely zérushelyeinek halmaza épp a kardioid pontthalmaza!

### Kutatómunkák, mellékelt megoldás nélkül

#### 6.1. feladat

a) Rajzolj parabolát!

b) Rajzold meg a parabola képét egy olyan körre vonatkozó inverziónal, amelynek  $kp$ -ja a parabola fókusza!

c) Tegyéél megfigyelést, próbálj bizonyítást is adni!

#### 6.2. feladat

Legyen  $e$  adott kör, egységnyi sugárral és guruljon rajta az  $r$  sugarú  $k$  kör, és képzeljük a  $k$  körhöz rögzítettnek a  $P$  pontot,  $k$  középpontjától  $t \cdot |r|$  távolságban.  $r$  negatív értékén azt értjük, hogy  $k$  az  $e$  kör ívében belül gurul. A  $P$  pont által leírt görbét hipocikloisnak, illetve epicikloisnak nevezik, attól függően, hogy  $k$  belül vagy kívül gördül.

Készítsünk univerzális epi-hipo-ciklois rajzó programot. Legyen látható két tengely, amelyeken  $r$  illetve  $t$  értéke állítható, és jelenjen meg a beállításnak megfelelő görbe.

#### 6.3. feladat

Ábrázold, hogy körív alakú vagy egyenes tükröző felületen különböző pontokból vagy különböző irányokból indított sugárnyalábok miként tükröződnek. Milyen görbe fénylik fel?

**Megoldásvázlatok az 5.1.-5.4. feladatokhoz.**

**5.1.feladat**

Oszd fel a körvonalat 36 egyenlő ívre és az osztópontokat számozzuk 0-tól 35-ig, majd kössük össze az  $n$ -edik osztópontot a  $2n$ -edik osztóponttal (mod 36). Mutassuk meg, hogy az így kapott egyenesek egy kardioidot érintenek!

**Megoldás**

Feleltessük meg a körvonalat az 1.3. feladat  $f$  körének! Lássuk be, hogy az  $n$ ,  $2n$  számokat összekötő egyenes megegyezik a fénysugár egyenesével, ha az  $a$   $B = 0$  számnak megfelelő pontból indult és az  $f$  kör  $S = n$  pontján tört meg!

**5.2. feladat**

Guruljon most egy rögzített  $e$  kör körül egy feleakkora sugarú  $k$  kör. A  $k$  kör valamely pontja által leírt görbét *nefroidnak* (vesegörbe) nevezik.

**a)** Ábrázold a nefroidot!

**b)** Határozd meg a nefroid valamely pontjában az érintőegyenest a 3.10. Állításhoz hasonló módon!

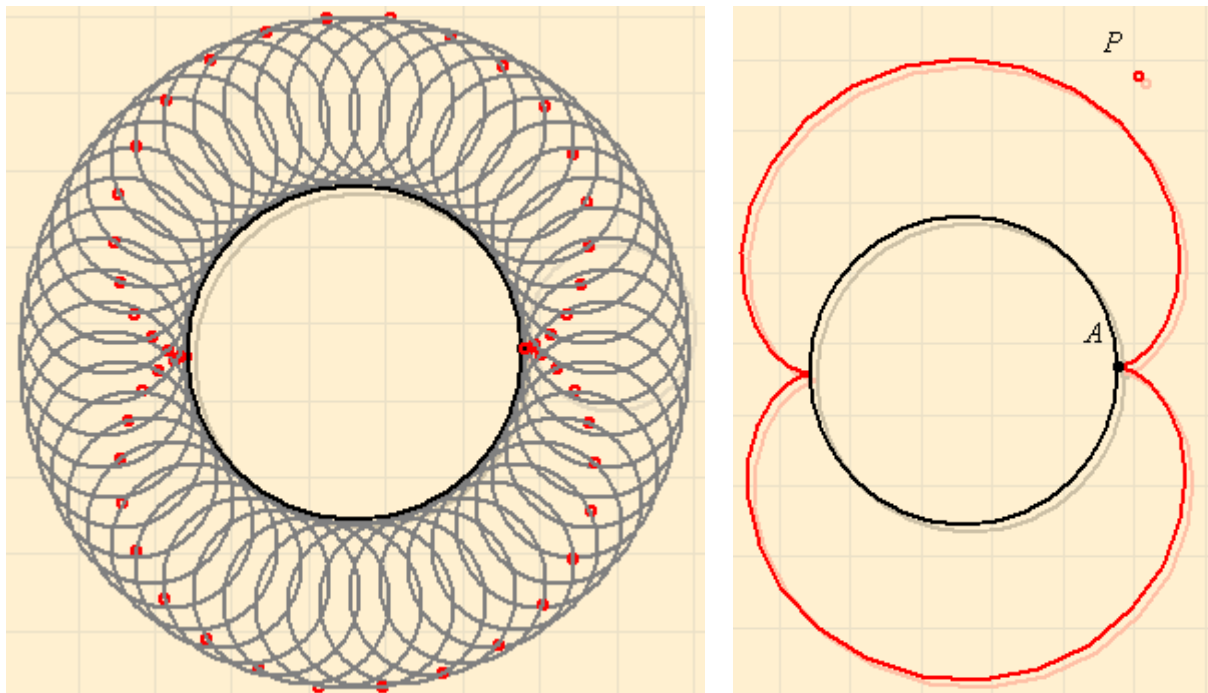
**c)** Mutasd meg, hogy a párhuzamos fénysugarak egy félkör belső felületén való tükröződés után egy nefroidot érintenek (tehát nefroidot látunk a teáscsészében).

**Megoldás**

**a)** Cabri programmal az ábra létrehozásához az 1.1. feladat megoldásának menetét kell kis módosítással követnünk.

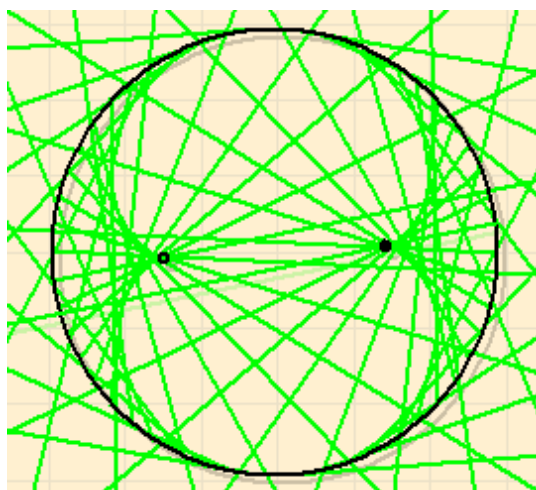
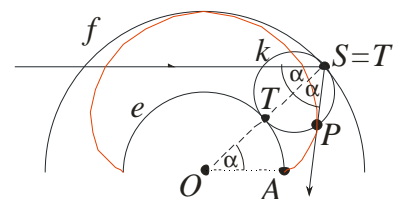
Az Euklides programmal való megoldást itt részletezzük.

<b>1.lépés</b>	Az $O$ , $A$ , $T$ pontok felvétele	
<b>2.lépés</b>	Az $O$ kp-ú, $A$ -n áthaladó $e$ kör felvétele (valójában nem kell).	
<b>3.lépés</b>	$O$ tükörképe $T$ -re $T'$ .	
<b>4.lépés</b>	A $TT'$ pontpár felezőpontja $Q$ .	
<b>5.lépés</b>	A $Q$ kp-ú kör $T$ -n át $k$ .	
<b>6.lépés</b>	Az $OT$ , $OA$ félegyenesek felvétele	
<b>7.lépés</b>	$I_4$ segédpont $A$ -tól $T$ felé bárhol.	
<b>8.lépés</b>	Körív felvétele $O$ kp-tal $I_4$ -en át, $OA$ , $OT$ (félegyenes) szélekkel.	
<b>9.lépés</b>	Forgatunk $Q$ körül az előző ívvel, mint szöggel. $T$ képe $P^*$ , $P^*$ képe $P$ .	
<b>10.lépés</b>	Elrejtjük a félegyeneseket, ívet, az $O$ , $T$ , $Q$ , $T'$ , $P^*$ pontokat, $P$ -t, $k$ -t átszínezzük	
<b>11.a)</b>	Animálhatjuk az ábrát $A$ $T$ pont (Shift!) $e$ -n való futtatásával.	
<b>11.b)</b>	Előzőleg bejelölhetjük a „Fázisok egyidejű mutatása opciót (lásd a bal oldali ábrát)	
<b>11.c)</b>	$k$ eltüntetése után kérhetjük $P$ mértani helyét, ha $T$ (Shift) fut $e$ -n	



**b)** A mozgó  $k$  kör aktuális  $P$  pontjában a sebesség irányú egyenes most is átmegy  $k$ -nak az  $e$  fix körrel való  $T$  érintési pontjával átellenes  $T'=S$  pontján.

**c)** Mutassuk meg, hogy ha az  $f$  kör kétszer akkora sugarú, mint  $e$  és a beeső fénysugár iránya párhuzamos az  $OA$  félegyenessel ( $O$  a nefroid  $e$  fix körének kp-ja,  $A$  a mozgó  $k$  kör vizsgált pontjának kiindulási pontja, egyben  $e$  pontja, a nefroid egyik szinguláris pontja), akkor a fénysugár az  $f$  körön való megtörés után a nefroid érintőegyenesén halad (lásd az ábrát).



### 5.3. feladat

- a) Írd fel a kardioid paraméteres egyenletrendszerét! Legyen pld  $\alpha = AOT\angle$  a mozgó  $k$  kör és a fix  $e$  kör  $T$  érintési pontjának forgásszöge, és írd fel a kardioid aktuális  $P$  pontjának koordinátáit leíró  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$  függvényeket.  
 b) A kapott függvények deriválásával határozd meg a  $P$  pontbeli sebesség irányát!  
 c) Adj új bizonyítást a 3.10. állításra!  
 d) Határozd meg a kardioid teljes ívének hosszát!

### Megoldás

a)  $x(\alpha) = r \cdot (2\cos\alpha - \cos 2\alpha)$ ,  $y(\alpha) = r \cdot (2\sin\alpha - \sin 2\alpha)$ , ahol  $r$  az  $e$  (és a  $k$ ) kör sugara.

b)  $x'(\alpha) = 2r \cdot (-\sin\alpha + \sin 2\alpha)$ ,  $y'(\alpha) = 2r \cdot (\cos\alpha - \cos 2\alpha)$ .

c)  $S(3r \cdot \cos\alpha, 3r \cdot \sin\alpha)$ ,  $\underline{PS}_x = r \cdot (\cos\alpha + \cos 2\alpha)$ ,  $\underline{PS}_y = r \cdot (\sin\alpha + \sin 2\alpha)$ . Azt kell igazolni, hogy a  $(\underline{PS}_x, \underline{PS}_y)$  és a  $(x'(\alpha), y'(\alpha))$  vektorok egymás konstans-szorosai. Ez egyenértékű a

$(-\sin\alpha + \sin 2\alpha) \cdot (\sin\alpha + \sin 2\alpha) = (\cos\alpha - \cos 2\alpha) \cdot (\cos\alpha + \cos 2\alpha)$  relációval, amelyről beszorzás után kiderül, hogy azonosság.

d) Az ívhossz a teljes megtett út a görbe mentén, azaz a sebesség abszolútértékének (hosszának) integrálja az idő szerint. Ha  $\alpha$  egyben az idő is, akkor  $(x'(\alpha), y'(\alpha))$  a sebességvektor, abszolútértéke:  $4r \cdot \sin(\alpha/2)$ . Az ívhossz ebből  $16r$ .

### 5.4. feladat

Algebrai görbe-e a kardioid? Azaz van-e olyan kétváltozós polinom, amely zérushelyeinek halmaza épp a kardioid ponthalmaza? Ha igen, akkor adj meg ilyen polinomot!

### Megoldás

Igen, algebrai görbe. Alkalmazzuk az 1.4. feladat megközelítését, pontosabban a 3.5.b) állítást.

Tekintsük a  $P(x, y)$  pontot, legyen  $PA=d$ ,  $PO = h$ , és legyen  $OA=r$ , ami tehát az  $e$  kör sugara is. A  $P$  pont akkor és csak akkor van rajta a kardioidon, ha a  $PA$  egyenesnek és az  $e$  körnek  $A$ -tól különböző metszéspontja  $P$ -től  $A$  irányában épp  $2r$  távolságra van. A  $P$  pont  $e$ -re vonatkozó hatványát kétféleképpen felírva megkapjuk az illeszkedés algebrai feltételét:

$$2rd = h^2 - r^2.$$

Szeretnénk koordinátákra áttérni, de  $d$  kifejtése itt még tartalmazna gyökös tagot, ezért négyzetre kell emelni. Az ekvivalencia elveszne, ha a sík valamely  $P$  pontjára teljesülne a  $2rd = h^2 - r^2$  összefüggés. Ez egyenértékű az  $(r - d)^2 = h^2 + d^2$  relációval, amely semmilyen  $P$ -re se teljesülhet, hiszen az  $OAP$  (esetleg elfajuló) háromszög oldalai  $d$ ,  $h$ ,  $r$ , így  $|r - d| \leq h$ . Négyzetre emelhetünk, kapjuk a

$$2r^2d^2 = (h^2 - r^2)^2$$

egyenletet, amely  $a$  koordináták behelyettesítése és 0-ra rendezés után adja a kívánt polinomot. Ha pld  $A$  az origó és  $O(-r, 0)$ , akkor a polinom:

$$4r^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + 2rx)^2.$$

### III. Morley tétele

*Ez volt a gondolatmenet. A bizonyítás már egy sokkal egyszerűbb dolog.*

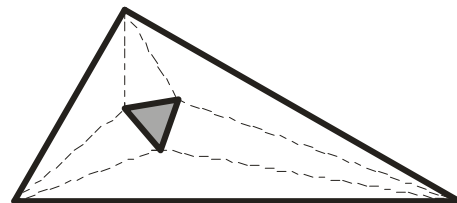
Frank Morley

#### Bevezetés (gépterem)

Ebben a fejezetben az elemi geometria egyik legkülönlegesebb tételéről lesz szó. Frank Morley kb 1904-ben „találta” az alábbi tételt:

#### 7. Morley tétele

Ha bármely háromszögben megrajzoljuk a belső szögek szögharmadolóit, és bármely két csúcsnál képezzük annak a két szögharmadolónak a metszéspontját, amelyek a két csúcs közti oldalhoz közelebb vannak, akkor a három csúcspárból így származtatott három pont szabályos háromszöget alkot.



Morley tételére ma már számos bizonyítás létezik. Az alábbiakban nem arra törekszünk, hogy felelevenítsük a legügyesebb gondolatmeneteket, hanem arra, hogy bepillantást engedjünk a tétel felfedezésének néhány érdekes részletébe. Előzetesként csak annyit jegyzünk meg, hogy a tételhez a háromszög oldalegyeneseit érintő kardiodok rendszerének áttekintése vezette el Frank Morleyt.

A Morley-féle általánosabb eredményekből valamit megsejthetünk, ha megoldjuk az alábbi feladatot.

#### 7.1. feladat

- Vegyél fel egy háromszöget, rajzold meg a szögharmadolóit, és keresd meg a Morley tételben szereplő szabályos háromszöget! A csúcsok mozgatásával „ellenőrizd” a tétel helyességét!<sup>5</sup>
- Rajzold meg az össze szögharmadolót, azaz az előbbieket  $120^\circ$ -os elforgatottjait<sup>6</sup>, és keress további szabályos háromszögeket!
- Tegyél megfigyelést a kapott szabályos háromszögekkel kapcsolatban!  
(Javaslat: Cabri)

#### Megoldás Cabrival

<b>1.lépés</b> A 0, 1 pontok és a 01 szakasz (Segment) felvétele	
<b>2.lépés</b> A háromszög $E_1$ , $E_2$ , $E_3$ csúcsainak felvétele, az oldalegyenesek megrajzolása és vastag vonallá (Thick) alakítása	
<b>3.lépés</b> A 01 szakasz hosszának lemérése (Distance and length)	
<b>4.lépés</b> 01 hosszának másolása a háromszög csúcsaiból kiindulva <sup>7</sup> . A Measurement Transfer gombra való klikkelés után a 01 szakasz hosszát jelző számra, majd az $E_i$ pontra, végül bárhova mellé klikkelünk. Kapjuk az $I_i$ segédpontokat.	
<b>5.lépés</b> $E_i$ kp-ú, $I_i$ -n áthaladó körök megszerkesztése, majd az oldalegyenesekkel való metszéspontjaik megjelölése	

<sup>5</sup> Természetesen ez nem jelent matematikai bizonyítást, hívjuk is erre fel a diákok figyelmét!

<sup>6</sup> Tehát minden csúcsnál 6 szögharmadoló van.

<sup>7</sup> Az Cabri II Plus verzióban ehhez előbb egy-egy félegyenest is fel kell venni az  $E_i$  pontokból kiindulva vagy a Körző (Compass) eszközt kell használni ebben a lépésben.

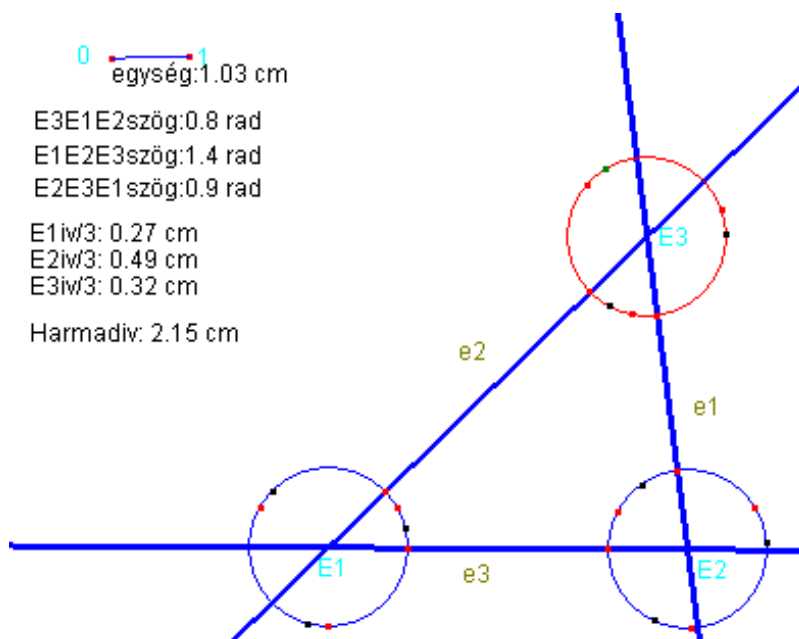
**6. lépés** A háromszög belső szögeinek lemérése. Ha az Angle gomb megnyomása után rendre az  $E_2$ ,  $E_1$ ,  $E_3$  pontra klikkelünk, akkor kiíródik az  $E_2E_1E_3\angle$  értéke. Jobb, ha ez radián. Átállítás az „Options/Preferences/Display Precision and Units” menübenpontban.



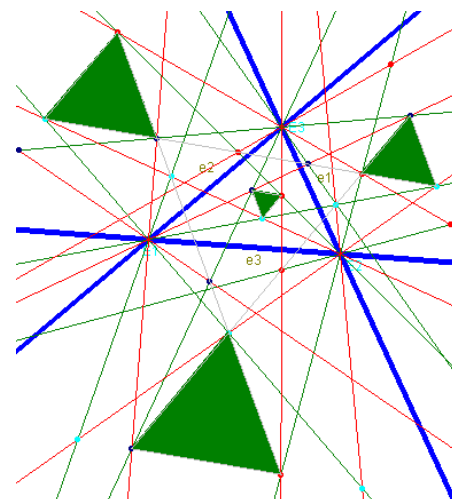
**7. lépés** A bejelölt szögek harmadának megfelelő ívhosszok kiszámítása és kiírása. A „Calculate” gombra klikkelve megjelenik a számológép. Ezután a szöget jelölő számra, majd a számológép szorzásjelére (\*), majd a 01 szakasz hosszát jelző számra, azután a számológép osztásjelére (/) klikkelünk és utánaírunk a billentyűzetről egy 3-ast. A számológép egyenlőségjelére klikkelve megjelenik az eredmény, amit a kurzorral rámozgatunk a lapra.



**8. lépés** Megharmadoljuk a háromszög belső és külső szögeit. A távolságtásvivő (Measurement transfer) gomb megnyomása után az előbb kiszámolt megfelelő ívhossz értékre, majd a csúcs körüli körre, végül az ív kezdőpontjára, a kör és az oldal mp-jára klikkelünk. Az ívet a kapott pontból indulva újból felmérjük. A kalkulátorral kiírjuk a 01 szakasz hosszának  $(2\pi/3)$ -szorosát és azt felmérjük a kapott harmadolópontoktól az ívekre.



**9. lépés** A 6-6-6 szögharmadoló megrajzolása. Egy oldalhoz mindkét rá illeszkedő csúcsonál három-három szögharmadoló tartozik: a közelebbi belső és annak  $120^\circ$ -os elforgatottjai. Az oldalhoz tartozó, az egyik csúcson átmenő szögharmadolóknak piros, a másik csúcson átmenő hozzá tartozó harmadolóknak zöld színt adunk. A zöld és piros harmadolók metszéspontjára lesz szükség. A metszéspontokat aszerint színezzük, hogy melyik oldalhoz tartoznak.

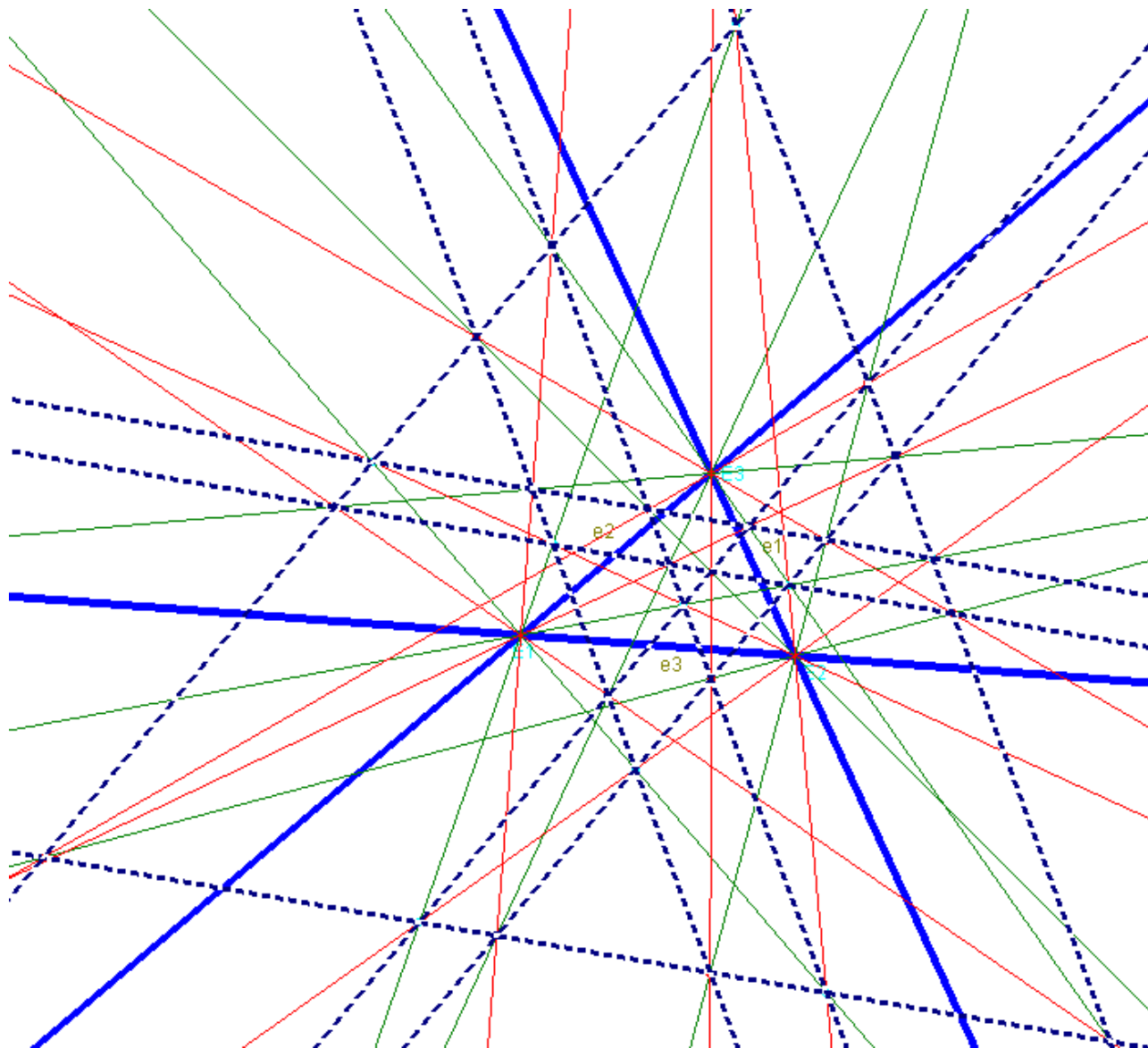




a) Az ellenőrzést szemre, vagy az oldalak hosszának kiíratásával, vagy az „Equidistant?” gomb alkalmazásával, majd a csúcspontok kurzorral való mozgásával végezzük el.



b)-c)



vastag vonalak: a háromszög oldalegyenesei; vékony vonalak: szögharmadolók;  
szaggatott vonalak: a szögharmadolók metszéspontjai közül 6-6 ugyanarra az egyenesre  
illeszkedik. Ezek az egyenesek sok szabályos háromszöget alkotnak.

**Bevezető feladatok Morley tételéhez**

**8.1. feladat**

Mutasd meg, hogy a kardioid  $OA$  szimmetriatengelyével  $q$  szöget bezáró<sup>8</sup> érintőn az érintési pont a kardioid  $O$  középpontjától

$$3r \sin \frac{q}{3}$$

távolságra van, ahol  $r = OA$ , és az  $A$  pont a kardioid szinguláris pontja.

**8.2. feladat**

Igazold a  $\sin \alpha \sin(\gamma - \beta) + \sin \beta \sin(\alpha - \gamma) + \sin \gamma \sin(\beta - \alpha) = 0$  azonosságot!

**8.3. feladat**

Legyenek  $e_1, e_2, e_3$  egyenesek a síkon,  $m_1, m_2, m_3$  rögzített valós számok és jelölje  $\Delta_i(P)$  a  $P$  pontnak az  $e_i$  egyenestől mért előjeles távolságát<sup>9</sup>. Mutassuk meg, hogy az

$$m_1 \Delta_1(P) + m_2 \Delta_2(P) + m_3 \Delta_3(P) = 0$$

egyenlet egyenes (esetleg a teljes sík vagy üres alakzat) egyenlete.

**8.4. feladat**

Az alábbi feladatok az egyenes egyenletéről szólnak a komplex számsíkon. Mutasd meg, hogy a  $z$  komplex szám pontosan akkor illeszkedik az

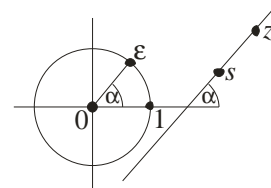
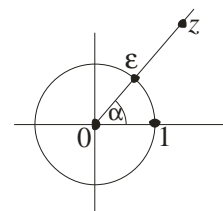
**a)** origón és az  $\varepsilon$  egységnyi abszolút értékű komplex számon átmenő egyenesre, ha

$$z - e^2 \bar{z} = 0,$$

ahol  $\bar{z}$  a  $z$  komplex szám konjugáltját jelöli.

**b)**  $s$  komplex számon átmenő, a valós tengellyel az  $\varepsilon$  komplex egység argumentumával egyenlő szöget bezáró egyenesre, ha

$$z - s + e^2 \bar{s} - e^2 \bar{z} = 0.$$



**8.5. feladat**

Legyenek az  $O, A, T$  pontoknak megfelelő komplex számok rendre  $0, 1$  és  $\varepsilon$ , ahol  $|\varepsilon|=1$ . Tekintsük azt a kardioidot, amelynek centruma  $O$ , szinguláris pontja  $A$ , és legyen  $P$  a kardioidnak az a pontja, amelyhez tartozó mozgó  $k$  kör épp  $T$ -nen érinti a fix  $e$  kört. Írjuk fel a kardioid  $P$ -beli érintő egyenesének az 5.7. feladatnak megfelelő komplex egyenletét!

<sup>8</sup> Lásd a 3.11. Értelmezést!

<sup>9</sup> Tehát  $e_i$  egyik oldalán a  $\Delta_i(P)$  távolság pozitív, a másikon negatív.

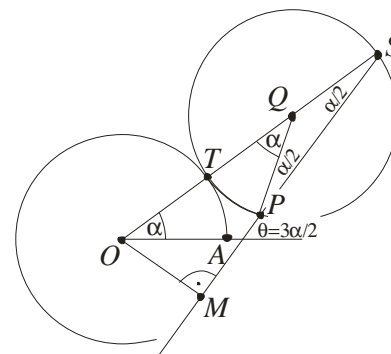
**A 8.1.-8.5. feladatok megoldása**

**A 8.1. feladat megoldása**

A 3.10. feladat állítása alapján a  $P$ -beli érintő a mellékelt ábrán látható  $PS$  egyenes és  $\angle PSO = \alpha/2$ , ha  $\angle TOA = \alpha$ , míg ugyanekkor a  $PS$  érintőegyenes és az  $OA$  egyenes szöge  $q = 3\alpha/2$ . Ha  $M$  az  $O$  centrum vetülete az érintőn, akkor az  $OMS$  derékszögű háromszögben  $OM = OS \cdot \sin(\alpha/2)$ , azaz

$$OM = 3r \sin \frac{q}{3},$$

amit bizonyítani kellett.



**A 8.2. feladat megoldása**

A  $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  addíciós tétel egyszerű alkalmazásával hat darab háromtényezős szorzatot kapunk, amelyek páronként kiejtik egymást.

**A 8.3. feladat megoldása**

Jelölje  $\underline{n}_i$  az  $e_i$  egyenes egységnyi hosszú, a pozitívan számított félsík felé irányuló normálvektorát,  $P_i$  pedig az egyenes egy tetszőleges pontját. Ekkor a skaláris szorzás definíciója alapján

$$\Delta_i(P) = (\underline{P} - \underline{P}_i) \cdot \underline{n}_i.$$

Ezért a feladatban megadott egyenlet ekvivalens az alábbi egyenletek bármelyikével:

$$m_1(\underline{P} - \underline{P}_1) \cdot \underline{n}_1 + m_2(\underline{P} - \underline{P}_2) \cdot \underline{n}_2 + m_3(\underline{P} - \underline{P}_3) \cdot \underline{n}_3 = 0,$$

$$\underline{P} \cdot (m_1 \underline{n}_1 + m_2 \underline{n}_2 + m_3 \underline{n}_3) - (m_1 \underline{P}_1 \cdot \underline{n}_1 + m_2 \underline{P}_2 \cdot \underline{n}_2 + m_3 \underline{P}_3 \cdot \underline{n}_3) = 0.$$

Vizsgáljuk az utóbbi egyenletet! Látható, hogy ha az  $m_1 \underline{n}_1 + m_2 \underline{n}_2 + m_3 \underline{n}_3$  vektor nullvektor, akkor a sík egyenletéről vagy üres alakzatról van szó, aszerint, hogy a második zárójeles kifejezés ( $P$ -től független!) értéke zérus vagy sem. Ha a vizsgált vektort nem nullvektor, akkor viszont egy  $m_1 \underline{n}_1 + m_2 \underline{n}_2 + m_3 \underline{n}_3$  normálvektorú egyenes egyenletét kaptuk.

**A 8.4. feladat megoldása**

a) A  $z$  komplex szám pontosan akkor illeszkedik az adott egyenesre, ha  $\frac{z}{e}$  valós, azaz, ha  $\frac{z}{e} = \overline{\frac{z}{e}}$ . Innen átszorzással és az  $\bar{e} = \frac{1}{e}$  összefüggés felhasználásával kapjuk az a) feladatrész állítását.

b) A bizonyítás megegyezik az a)-ban adott levezetéssel, csak itt  $z$  helyére  $(z - s)$ -t kell írni.

**A 8.5. feladat megoldása**

Az érintő átmegegyezik a  $3e$  komplex számnak megfelelő  $S$  ponton és az  $OA$  tengellyel bezárt szögének duplája a  $\angle TOA$  háromszorosával egyenlő (lásd a 3.10. Állítást), innen az 5.7. b) feladat állítása alapján azonnal adódik az egyenes egyenlete:

$$z - 3e + 3e^2 - e^3 \bar{z} = 0.$$

## A háromszöghöz írt kardioidoktól Morley tételéig

### 9.1. Lemma

Ha az  $O$  centrumú kardioid szinguláris pontja  $A$  és a kardioid érinti az  $E_1E_2E_3$  háromszög  $E_2E_3=e_1$ ,  $E_3E_1=e_2$ ,  $E_1E_2=e_3$  oldalegyeneseit, akkor

$$(9.1.) \quad |\Delta_1| \sin \frac{\theta_3 - \theta_2}{3} + |\Delta_2| \sin \frac{\theta_1 - \theta_3}{3} + |\Delta_3| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{3} = 0,$$

ahol  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  az  $e_1, e_2, e_3$  egyeneseknek a kardioid  $OA$  tengelyével bezárt szögét<sup>10</sup>,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  pedig  $O$  és az  $e_1, e_2, e_3$  egyenesek (előjeles) távolságát jelöli.

### Bizonyítás

A 8.1. feladat eredménye szerint a kardioid centrumának távolsága az  $e_1, e_2, e_3$  érintő egyenesektől rendre

$$|\Delta_1| = 3r \sin \frac{\theta_1}{3}, \quad |\Delta_2| = 3r \sin \frac{\theta_2}{3}, \quad |\Delta_3| = 3r \sin \frac{\theta_3}{3},$$

ahol  $r = OA$ . Ha alkalmazzuk a 8.2. feladat állítását az  $\alpha = \theta_1/3$ ,  $\beta = \theta_2/3$ ,  $\gamma = \theta_3/3$  szögekre, akkor kapjuk, hogy bármely - az oldalegyeneseket érintő - kardioidra teljesül a (9.1.) összefüggés.

#### 9.1.1. Megjegyzés

A lemmában szereplő  $\theta_3 - \theta_2, \theta_1 - \theta_3, \theta_2 - \theta_1$  szögek bizonyos mértékig a kardioid figyelembe vétele nélkül is értelmezhetőek. Ezek ugyanis, modulo  $360^\circ$ , az  $e_1, e_2, e_3$  egyeneseknek - a kardioid centrumát tartalmazó tartományhoz képesti - külső szögei,  $e_2$ -től  $e_3$  felé,  $e_3$ -től  $e_1$  felé, illetve  $e_1$ -től  $e_2$  felé.

### 9.2. Állítás

Adott háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő kardioidok<sup>11</sup> centrumainak mértani helye kilenc egyenes egyesítése. E kilenc egyenes egyenlete<sup>12</sup>

$$(9.2.1) \quad \Delta_1 \sin \frac{\Theta'_1}{3} + \Delta_2 \sin \frac{\Theta'_2}{3} + \Delta_3 \sin \frac{\Theta'_3}{3} = 0,$$

ahol  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  a tekintetbe vett pont (a kardioid centruma) és az  $e_1, e_2, e_3$  egyenesek előjeles távolságát jelöli, a pozitív előjelet a háromszögtartomány felőli félsíkban értve, míg  $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3$  a háromszög  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  külső szögeivel egyezik meg mod  $360^\circ$  és összegük  $0^\circ$ .

#### 9.2.1. Megjegyzés

Tényleg épp 9 egyenest definiál az állítás, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{\Theta'_1}{3} &\equiv \frac{\Theta_1}{3}, \quad \frac{\Theta_1 + 120^\circ}{3}, \quad \frac{\Theta_1 + 240^\circ}{3} \pmod{360^\circ}; \\ \frac{\Theta'_2}{3} &\equiv \frac{\Theta_2}{3}, \quad \frac{\Theta_2 + 120^\circ}{3}, \quad \frac{\Theta_2 + 240^\circ}{3} \pmod{360^\circ}; \\ \frac{\Theta'_3}{3} &\equiv -\left(\frac{\Theta'_1}{3} + \frac{\Theta'_2}{3}\right) \pmod{360^\circ}. \end{aligned}$$

### Bizonyítás

Először azt mutatjuk meg, hogy az oldalegyeneseket érintő kardioidok centrumai a (9.2.1.) egyenletű egyeneseken vannak.

Ez a háromszögtartomány pontjaira a 9.1. lemma közvetlen következménye. A háromszögben, vagy a határán lévő pontokra ugyanis  $|\Delta_i| = \Delta_i$  és a  $\theta_3 - \theta_2, \theta_1 -$

<sup>10</sup> Lásd a 3.11. Értelmezést!

<sup>11</sup> A szóhajóvő kardioidokról tehát nem kötjük ki, hogy azonos legyen a tengelyirányuk.

<sup>12</sup> A 8.3. feladatban magyaráztuk meg, hogy ezek miért egyenesek egyenletei.

$\theta_3$ ,  $\theta_2 - \theta_1$  szögek a háromszög megfelelő külső szögeivel egyeznek meg mod  $360^\circ$ , összegük pedig nyilvánvalóan  $0^\circ$ .

Tekintsünk most egy olyan tartományt, amely az egyik egyenesnek – pld  $e_3$ -nak – ellenkező oldalán van, mint a háromszögtartomány, a többi egyenesnek pedig ugyanazon az oldalán. A (9.1.) egyenletben most

$$|\Delta_1| = \Delta_1, \quad |\Delta_2| = \Delta_2, \quad |\Delta_3| = -\Delta_3,$$

ugyanakkor viszont a 9.1.1. Megjegyzésben leírt értelmezés alapján

$$\theta_3 - \theta_2 \equiv \Theta_1 - 180^\circ, \quad \theta_1 - \theta_3 \equiv \Theta_2 - 180^\circ, \quad \theta_3 - \theta_2 \equiv \Theta_1 \pmod{360^\circ},$$

tehát (9.1.)-ből ebben az esetben a

$$(9.2.2.) \quad \Delta_1 \sin\left(\frac{\Theta'_1}{3} - 60^\circ\right) + \Delta_2 \sin\left(\frac{\Theta'_2}{3} - 60^\circ\right) + \Delta_3 \sin\left(-\frac{\Theta'_3}{3}\right) = 0$$

(9.2.1.)-gyel analóg egyenlethez jutunk. Ennek  $(-1)$ -szerese

$$\Delta_1 \sin\left(\frac{\Theta'_1}{3} + 120^\circ\right) + \Delta_2 \sin\left(\frac{\Theta'_2}{3} + 120^\circ\right) + \Delta_3 \sin\left(\frac{\Theta'_3}{3}\right) = 0,$$

azaz

$$(9.2.3.) \quad \Delta_1 \sin\left(\frac{\Theta'_1 + 360^\circ}{3}\right) + \Delta_2 \sin\left(\frac{\Theta'_2 + 360^\circ}{3}\right) + \Delta_3 \sin\left(\frac{\Theta'_3}{3}\right) = 0,$$

amely a (9.2.1) egyenletosztályba tartozó egyenlet.

Hasonlóan kezelhető le az olyan tartomány esete, amely két egyenesnek is ellenkező partján van, mint a háromszögtartomány.

Tegyük fel most, hogy az  $O$  pont kielégíti (9.2.1.) összefüggést a  $\Theta_i$ -k egy konkrét választása mellett. Meg szeretnénk határozni az  $OA$  irányt és az  $OA = r$  távolságot, hogy az  $O$  centrumú  $A$  szinguláris ponttal rendelkező kardioid érintse a háromszög oldalegyeneseit. Figyelembe kell vennünk, hogy  $O$  melyik tartományban van. Az egyenesnek van egy, az adott tartományon érvényes

$$(9.2.4.) \quad |\Delta_1| \sin \frac{\Theta_1^*}{3} + |\Delta_2| \sin \frac{\Theta_2^*}{3} + |\Delta_3| \sin \frac{\Theta_3^*}{3} = 0,$$

egyenlete, ahol  $\Theta_1^*$ ,  $\Theta_2^*$ ,  $\Theta_3^*$  a tartomány külső szögeivel kongruensek mod  $360^\circ$ . Tekintsük a

$$(9.2.5.) \quad |\Delta_1| = 3r \sin \frac{\theta_1}{3}, \quad |\Delta_2| = 3r \sin \frac{\theta_2}{3}, \quad \theta_2 - \theta_1 = \Theta_3^*$$

egyenletrendszer! Az addíciós tétel alkalmazásával a rendszer megoldható:

$$r = \frac{\sqrt{|\Delta_1|^2 + |\Delta_2|^2 - 2|\Delta_1||\Delta_2| \cos \frac{\Theta_3^*}{3}}}{3 \sin \frac{\Theta_3^*}{3}},$$

$$\theta_1 = 3 \cdot \arccos \left( \frac{|\Delta_2| - |\Delta_1| \cos \frac{\Theta_3^*}{3}}{3r \sin \frac{\Theta_3^*}{3}} \right)$$

A kapott  $\theta_1$  forgásszög  $0^\circ$  és  $540^\circ$  között változik. Ez (3.11. szellemében)  $r$ -rel együtt egyértelműen meghatároz egy olyan  $O$  centrumú kardioidot, amely (9.2.5.) alapján érinti  $e_1$ -et és  $e_2$ -t, továbbá (9.2.4.) alapján  $e_3$ -at.

**9.2.2. feladat** (Mellékelt megoldás nélkül)

Mutasd meg, hogy a (9.2.1.) egyenesek három háromtagú csoportba oszthatók úgy, hogy az azonos csoportban lévők párhuzamosak legyenek egymással.

**9.3. Állítás**

Ha valamely (külső) pontból a kardioidhoz húzott három érintő forgásszöge  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , míg a pontot a kardioid centrumával összekötő egyenes forgásszöge  $\varphi$ , akkor  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\varphi$ , azaz  $\varphi$  az érintők forgásszögeinek átlaga.

**Bizonyítás**

Illesszük a kardioidhoz a komplex számsíkot úgy, hogy centruma a 0, szinguláris pontja pedig az 1 legyen. Ilyenkor az  $e$  fix kör a komplex egységkörnek felel meg. A 8.5. feladat megoldásában azt kaptuk, hogy a  $z$  komplex számnak megfelelő pont akkor és csakis akkor illeszkedik a kardioid  $\varepsilon$  paraméterhez tartozó  $P$  pontjában<sup>13</sup> húzott érintőre, ha

$$(9.3.1.) \quad z - 3e + 3e^2 - e^3 \bar{z} = 0.$$

Erre az egyenletre fordítva is ránézhetünk. Ha rögzítjük  $z$ -t, akkor kereshetjük azokat az egységnyi  $\varepsilon$  komplex számokat, amelyek kielégítik (9.3.1.)-et. Az ilyen  $\varepsilon$  számok a  $z$  komplex számnak megfelelő pontból a kardioidhoz húzott érintők érintési pontjainak paraméterei. Ebből következik, hogy a kardioidhoz bármely pontból legfeljebb három érintő húzható, hiszen (9.3.1)  $\varepsilon$ -ban harmadfokú, így legfeljebb három gyöke lehet.

Morley, a tétel felfedezését ismertető levelében nem sokat diszkutál, hanem azzal igazolja az állítást, hogy Vieta formulái szerint (9.3.1) gyökeire

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 = \frac{z}{\bar{z}},$$

és itt a bal oldal argumentuma  $2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/3$  (lásd 3.10/c),

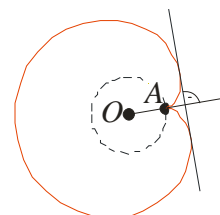
a jobb oldalé pedig  $2\varphi$ .

**Megjegyzések**

**9.3.1.** A „forgásszögön” bármely egyeneshez képesti elfordulás szögét érthetjük, az állítás nem függ a referenciatengely választásától.

**9.3.2.** Szög harmadából három is van, amelyek egymástól  $120^\circ$ -kal térnek el, így a 9.2. állításban az „átlaga” szó helyett pontosabb lenne az „egyik átlaga” kifejezés.

**9.3.3.** Van a kardioidnak egy olyan érintője, amely két helyen is érinti a görbét. Ez a szimmetriatengelyre merőleges egyik érintő, amely a  $\pm 60^\circ$ -os  $\varepsilon$  egységekhez tartozó pontban érinti a kardioidot. Ez az érintő a fentiekben kétszeres multiplicitású.



**9.3.4. feladat**

Mutassuk meg, hogy a kardioid bármely külső pontjából multiplicitással számolva) három érintő húzható a kardioidhoz.

**9.4. Állítás**

A háromszög oldalegyeneseit érintő kardioidok középpontjai olyan egyeneseken helyezkednek el, amelyek egymással  $60^\circ$ -os ( $120^\circ$ -os) szöget zárnak be.

**Bizonyítás**

Az indoklás bizonyára kivitelezhető lenne az egyeneseknek a 9.2. állításban szereplő konkrét egyenletei révén, az addíciós tételek alkalmazásával. De Morley nem így gondolkodott. Ő a 9.2.-beli egyenesek nagyon távoli pontjaihoz tartozó hatalmas kardioidokra utalt. Ha ránézünk egy ilyen kardioidra

<sup>13</sup> Tehát  $\varepsilon$  egységnyi abszolútértékű komplex szám és  $P=2\varepsilon-\varepsilon^2$ .

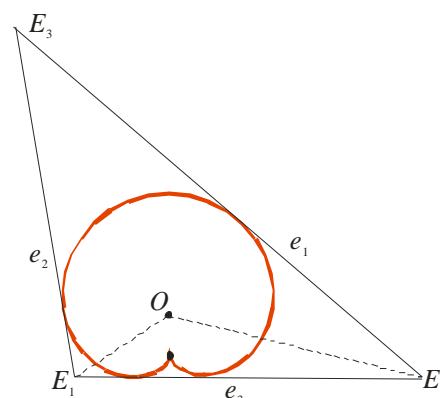
dot tartalmazó ábrára, akkor háromszögünk, szükségképpen alig lesz megkülönböztethető egyetlen ponttól. Mintha egyetlen pontból húztuk volna meg a három érintőt ugyanahhoz a kardioidhoz. A 9.3. Állítás szerint a kardioid centrumának az oldalegyenesek irányai átlagának irányában kell elhelyezkednie minden ilyen nagy kardioidra, tehát a kardioidok centrumait tartalmazó egyenesek párhuzamosak a háromszög oldalegyenes-irányainak három szögharmadolójával.

### 9.5. Állítás

A háromszög oldalegyeneseit érintő kardioidok középpontjait tartalmazó két egyenes metszéspontja a háromszög valamely oldalán található két szöge egy-egy szögharmadoló egyenesének metszéspontja.

### Bizonyítás

A gondolatmenet első fele heurisztikus. Ha a kardioid centrumokat tartalmazó egyenesen mozgatunk egy pontot, és minden pillanatban megrajzoljuk azt a kardioidot, amely a háromszög mindhárom oldalegyenesét érinti és az adott pont a centruma, akkor egy folytonosan változó képet látunk magunk előtt. Kis elmozdulásnál kicsit változik a kardioid helyzete, mérete, rajta kicsit mozognak arrébb az érintési pontok.



Két egyenes metszéspontjából kétféleképpen is változtatható folytonosan tovább a kardioid, de a különböző folytatások lokálisan csak ezen a metszésponton át érhetők el egymásból. Ennek az kell legyen az oka, hogy a metszésponthez tartozó kardioidot az egyik oldalegyenes két helyen is érinti. Az egyik egyenesen való elmozdulásnál az egyik érintési pont környezetében lesz továbbra is érintés, a másik egyenesen továbbhaladva, pedig a másik érintési pont közelében lesz érintés.

Röviden szólva, a metszésponthez tartozó kardioid két jogon is érinti az oldalegyeneseket, tehát az egyik egyenest kétszeresen is érinti.

Ha az  $e_3$  oldalegyenes kettős,  $e_2$  pedig közöséges érintő, akkor a bizonyítás befejezéséhez már csak a 9.3. Állításra kell hivatkoznunk abban a speciális esetben, amikor az érintők:  $e_2$ ,  $e_3$  és még egyszer  $e_3$ , illetve  $e_1$ ,  $e_3$  és még egyszer  $e_3$ .

#### 9.5.1. feladat

Hány olyan kardioid van, amely egy adott háromszög mindhárom oldalegyenesét érinti, és van olyan oldalegyenes, amelyet kétszer is?

### 9.6. Befejezés?

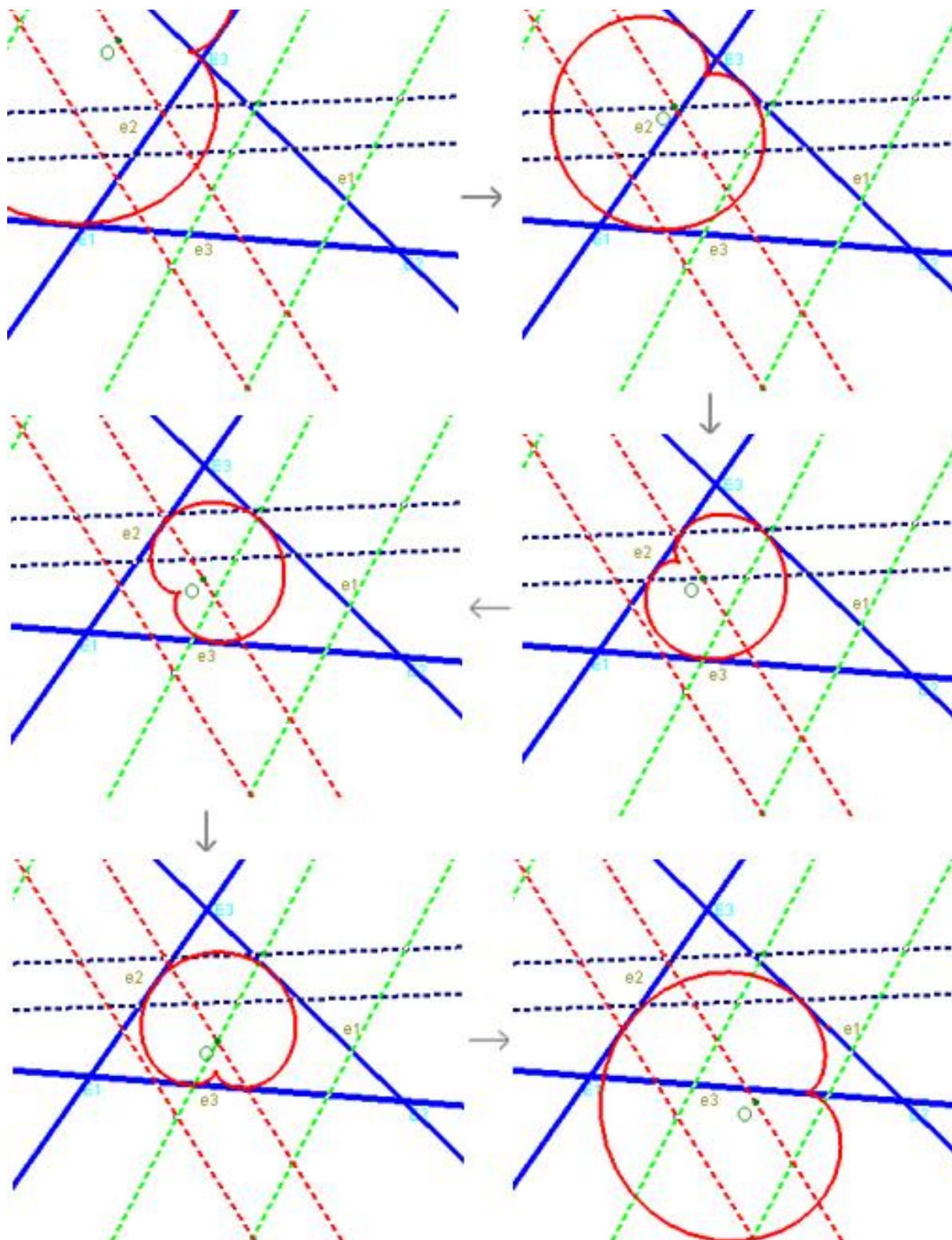
Morley gondolatmenetéből következik, hogy a háromszög szögharmadolóinak metszéspontjai sok szabályos háromszöget alkotnak<sup>14</sup>. A 7. tétel is be lenne bizonyítva, ha a tételben említett  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  szögharmadoló-metszéspontok  $F_1F_2$ ,  $F_2F_3$ ,  $F_3F_1$  egyeneseiről tudnánk, hogy a 9.2. Állításban említett kilenc egyenes közül valók, és különbözőek. Most erre csak egy „szemléletes” gondolatmenetet adunk: a háromszög oldalegyeneseit érintő,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  centrumú kardioidok folytonosan egymásba vihetők az oldalegyeneseket érintő kardioidokon át, úgy, hogy közben nem kapunk valamelyik oldalt kétszeresen is érintő kardioidot. Ez épp azt jelenti, hogy  $F_1F_2F_3$  az említett 9 egyenes alkotta háromszögek egyike, tehát szabályos.

<sup>14</sup> 27-et.



**9.7. feladat**

Készítsünk animációt! Rajzoljuk meg a fejezetben megismert kilenc egyenest, és az egyiket mozgatva a centrumot rajzoljuk ki minden pillanatban az oldalakat érintő kardioidot!



A letölthető animáció elérhető a Fazekas honlapján.



**Az utolsó rész feladatainak megoldása**

**9.3.4.**

Ha a (9.3.1.) egyenletben végrehajtjuk az (inverziónak megfelelő)

$$e \rightarrow \frac{1}{e}$$

helyettesítést, majd átszorozunk  $(-\bar{e}^3)$ -nel, akkor épp (9.3.1) konjugáltját

kapjuk. Ez azt jelenti, hogy (9.3.1) megoldásai csak az  $e = \frac{1}{e}$  összefüggés-

nek megfelelő, tehát egységnyi komplex számok lehetnek, illetve a további gyökök olyan párokban fordulhatnak elő, amelyek tagjai egymás képei az egységkörre vonatkozó inverziónál. Ha belátjuk, hogy külső pontból legalább két érintő húzható a kardioidhoz, akkor a fentiekből már következik, hogy három húzható.

Tekintsük a  $P$  külső pontból induló félegyeneseket. A  $PA$  félegyenesnek és a kardioid belsejének van közös pontja, az ellenkező irányú félegyenesnek pedig nincs közös pontja a kardioiddal és a belsejével sem. Mindezek következnek abból, hogy a kardioid bizonyos  $A$ -t tartalmazó szakaszok végpontjaiból, belseje ugyanezen szakaszok belső pontjaiból áll.

Paraméterezzük a félegyeneseket valamely  $P$  körüli  $l$  kör pontjaival!  $PA$  tartozzék az  $A_1=PA \cap l$ , az ellenkező félegyenes az  $A_0$  körüli ponthoz. Színezzük az  $l$  kör pontjait pirossal és kékkel, az  $X \in l$  pont legyen kék, ha a  $PX$  félegyenesnek van közös pontja a kardioid belsejével, illetve legyen piros, ha nincs. A kardioid előbb említett leírásából következik, hogy ha  $X$  kék, akkor a rövidebb  $A_1X$  ív pontjai is kék, míg ha  $X$  piros, akkor a rövidebb  $A_0X$  ív is piros. Tehát a piros pontok is és a kék is egy-egy ívet alkotnak.

A Dedekind axiómából adódik, hogy a piros és a kék ívnek mindkét  $A_0A_1$  íven van egy-egy határpontja,  $B_0$  és  $B_1$ . Annak alapján, hogy a kardioidvonal kompakt, és a kardioid belső pontjainak halmaza nyílt halmaz, megmutatható, hogy a  $PB_0, PB_1$  félegyeneseknek van közös pontja a kardioiddal, de a kardioid belsejével nincs közös pontja. Mivel a kardioid olyan algebrai görbe, amely nem tartalmaz egyenest (így szakaszt sem), ezért a  $PB_0, PB_1$  félegyenesek csak véges sok közös pontja van a kardioiddal, tehát érintők.

**9.5.1.**

Az eredmény  $27=3 \cdot 3 \cdot 3$ , erre 3 gondolatmenetet is adunk.

A) A 9.5. Állítás alapján számolunk. Ha  $e_3$  a kettős érintő, akkor az  $e_2, e_3, e_3$ , illetve az  $e_1, e_3, e_3$  egyeneshármassok szögharmadolóinak metszéspontját kell tekinteni. Mindkettő szögharmadolóból három van, így 9 metszéspontot kapunk. Ugyanennyit kapunk, ha  $e_1$  vagy  $e_2$  a kettős érintő.

B) Tegyük rá a kardioidot az  $e_1$  oldalegyenesre, hogy kétszer is érintse. Azután toljuk el úgy, hogy  $e_2$ -t is érintse. Ezt háromféleképpen is tehetjük, hiszen bármelyik iránnyal párhuzamosan három érintője is van a kardioidnak. Ezután nagyítsuk fel a kardioidot az  $E_3=e_1 \cap e_2$  pontból úgy, hogy érintse  $e_3$ -at. Ezt is háromféleképpen tehetjük meg, hiszen az  $e_3$  iránnyal párhuzamosan is három érintő van. Innen már adódik a  $3 \cdot 3 \cdot 3$ .

C) Ezen kardioidok centrumai a kardioid középpontok alkotta egyenesek metszéspontjaiban vannak. Három irány mindegyikében három egyenes van, így ezeknek  $3 \cdot 3 \cdot 3$  metszéspontja van.

## Felhasznált, illetve ajánlott irodalom

### Görbék

Pelikán József: Klasszikus algebrai görbék. Az Új matematikai mozaik című könyvben (Typotex, Budapest, 2002, [http://www.typotex.hu/book/m\\_0071.htm](http://www.typotex.hu/book/m_0071.htm)).

N. B. Vasziljev, V. L. Gutenmacher: Egyenesek és görbék (Прямые и кривые, Библиотечка физико-математической школы, Выпуск 4, Москва „Наука”, 1978)

G. N. Bergman: Cikloidok (Циклоида, Москва „Наука”, 1978)

Xah Lee: A Visual Dictionary of Famous Plane Curves, [http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves\\_dir/specialPlaneCurves.html](http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html)

The MacTutor History of Mathematics archive/Famous Curves Index, <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Curves/Curves.html>

Robert Ferréol: Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, <http://www.mathcurve.com/>

### Szoftverek

Az Euklides honlapjáról a program különböző verziói és a segédkönyve is letölthető: <http://www.euklides.hu/hun/euklides.htm>

Cabrilog, a Cabri szoftver honlapja <http://www.cabri.com/web/nsite/html/home.html>

A Cabri „tudományos” honlapja, a Grenoblei Alkalmazott Informatikai és Matematikai Intézet oldalain: <http://www-cabri.imag.fr/cabri2/accueil-e.php>

A Cinderella honlapja, <http://www.cinderella.de/tiki-index.php>

Ed Sandifer elemzése a Cinderelláról a The Mathematical Association of America honlapján, <http://www.maa.org/reviews/cinderella.html>

A „The Geometer’s Sketchpad” honlapja, <http://www.keypress.com/sketchpad/>

A Sketchpad tanórai alkalmazásainak gyűjteménye a Drexel Egyetem internetes Matematika Fórumán: <http://mathforum.org/sketchpad/sketchpad.html>

A Maple honlapja, <http://www.maplesoft.com/>

Stephen Wolfram: Mathematica, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

A Wolfram Research honlapja (a Mathematica szoftver gyártója): <http://www.wolfram.com/>

Lásd még a Fazekas Gimnázium matematikai portálján a szoftverekkel kapcsolatos linkeket: <http://matek.fazekas.hu/portal/linkek/szoftverek.htm>

Árki Tamás: Problémamegoldás a dinamikus geometria eszközeivel <http://www.sulinet.hu/tart/cikk/am/0/11723/1>

## Morley, Morley-tétel

„Egyszerű” megoldások:

D. O. Sklarszkij - N. N. Csencov - I. M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/1 Geometria I. (Planimetria), 118. feladat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. illetve újabban Typotex, ISBN: 963 9326 06 2.

H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987. 40-42. oldal

Lőrincz Pál: Geometriai feladatok megoldásáról/A geometriai transzformációk alkalmazása, az Élő matematika kötetben, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

Bőséges összefoglaló Morley tételéről:

Presenting the Morley issue of Eureka, Crux Mathematicorum, 1977, a 272. oldaltól.

*A tétel születéséhez vezető gondolatmenetet a tétel híressé válása után sok évvel Morley egy levélben mesélte el T. Hayashi japán professzornak, aki leközzölte a levelet egy japán lapban:*

F. Morley: On the intersection of the trisectors of the angles of a triangle, Journal of the Mathematical Association of Japan for Secondary Education

*A levél, Dan Pedoe jegyzeteivel megtalálható a Crux fent említett számában is.*

Morley-tétel a Mathworld weblexikonában:

<http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html>

*Alex Bogomolny cikkei a cut-the-knot matematika-portálon Morley kutatásainak további motivációira is rávilágítanak:*

<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>

<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/CenterCircle.shtml>

*Morleyről:*

Louise Cochrane, *Adelard of Bath: the first English scientist*, British Museum Press, London, 1994. Lásd az alábbi websitron:

<http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/morley.html>